



# UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA DIVISIÓN  
DE ESTUDIOS DE POSGRADO

“ANÁLISIS DE LA TEORÍA DE MARCOS DE REFERENCIA  
DE LA MÁQUINA DE INDUCCIÓN CON UN ENFOQUE EN  
ÁLGEBRA LINEAL”

## TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PRESENTA  
ING. ANTONIO DANIEL VELÁZQUEZ DELGADO

DIRECTOR DE TESIS  
Dr. JUAN CARLOS SILVA CHÁVEZ

CO-DIRECTOR DE TESIS  
DR. CARLOS PÉREZ ROJAS



MORELIA, MICHOACÁN

AGOSTO DEL 2014



# Abstract

The reference frame transformation theory has kept its validity and utility since the early twentieth century to the present day. As any other mathematical tool of analysis concerning the study of electrical machinery, it has evolved through time in conjunction with the electric machine theory. However, its importance is a fundamental part of it, to the point that it allows to unify and postulate the generalized estudy of the rotating electric machines. Nevertheless, different versions of what it is known today as the Park's transformation, has been used under various justifications and circunstances, in this thesis an historical review is made, it encompasses the period of time mentioned before with the goal of clearing out matters relative to its origin and applications at different times.

Through the linear algebra approach the Park's transformation is built, by doing so in this way it can be interpreted as an orthogonal transformation, this is done with the aim of giving it a certain amount of mathematical properties in order to facilitate the generalization and the work in the reference frame transformation theory. The so called generalized models of the induction machine with squirrel cage in  $abc$  and  $dq0$  are presented. These models are analized in the transient and steady state, and under symmetric and asymmetric fault conditions. At last and according to the geometrical conception that has been given to the transformation on the orthogonal  $dq0$  axes, an approximation to the saturation effect is set, based on the concept of the main flux path saturation.



# Resumen

La teoría de marcos de referencia, ha mantenido su vigencia y utilidad desde principios del siglo XX hasta nuestros días. Como cualquier otra herramienta de análisis referente a los estudios de las máquinas eléctricas, ésta ha evolucionado a lo largo del tiempo de manera conjunta con la teoría de máquinas eléctricas, sin embargo su importancia es parte fundamental de ésta, al grado que permite unificar y postular el estudio generalizado de las máquinas eléctricas rotatorias. No obstante diferentes versiones de lo que hoy se conoce como la transformada de Park, han sido usadas bajo diversas justificaciones y circunstancias, en este trabajo de tesis se hace un recuento histórico que abarca el período de tiempo antes mencionado con la finalidad de despejar cuestiones relativas a su origen y a sus aplicaciones en distintas épocas.

Mediante el enfoque del álgebra lineal se construye la transformada de Park, la cual se puede interpretar como una transformación ortogonal, esto con la finalidad de dotarla de ciertas propiedades matemáticas que faciliten la generalización y las operaciones en la teoría de marcos de referencia. Se presentan los llamados modelos generalizados en  $abc$  y en  $dq0$  de la máquina de inducción jaula de ardilla, a los cuales se les analiza en el régimen transitorio, estable y en situaciones de contingencias de tipo simétrico y asimétrico. Por último y de acuerdo con la concepción geométrica de la que se ha dotado a la transformación en los ejes ortogonales  $dq0$ , se plantea una aproximación al efecto de saturación, la cual se realiza usando el concepto de la saturación de la trayectoria principal del flujo magnético.



# Dedicatoria

*Esta tesis está dedicada a la belleza de los sueños de mis padres.*



# Agradecimientos

A mi familia.

A mis amigos.

A mis maestros.

Al Dr. Juan Carlos Silva Chávez.

Al Dr. Carlos Pérez Rojas.

A la Facultad de Ingeniería Eléctrica (FIE).

A la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica.

A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH).

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).



# Índice general

Abstract	I
Resumen	III
Dedicatoria	v
Agradecimientos	VII
Índice de figuras	XIII
Índice de tablas	xv
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Antecedentes históricos . . . . .	2
1.3. Justificación . . . . .	9
1.4. Objetivos . . . . .	10
1.4.1. Objetivo general . . . . .	10
1.4.2. Objetivos particulares . . . . .	10
1.5. Descripción de los capítulos . . . . .	11
<b>2. Teoría de marcos de referencia</b>	<b>13</b>
2.1. Nociones preliminares . . . . .	14
2.1.1. Longitud de un vector . . . . .	16
2.1.2. Ortogonalidad entre vectores . . . . .	17

2.1.3.	Propiedades de las matrices ortonormales . . . . .	19
2.1.4.	Transformaciones ortogonales . . . . .	23
2.2.	Transformación de marcos de referencia . . . . .	29
2.2.1.	Transformación de $abc$ a $a\beta\gamma$ . . . . .	30
2.2.2.	Transformación de $a\beta\gamma$ a $dq0$ . . . . .	33
2.2.3.	Transformación de $abc$ a $dq0$ . . . . .	34
2.2.4.	Planteamiento clásico de la transformada de Park . . . . .	35
2.2.4.1.	Matrices de transformación con $k = 1$ . . . . .	40
2.2.4.2.	Matrices de transformación con $k = \sqrt{\frac{2}{3}}$ . . . . .	41
2.2.4.3.	Matrices de transformación con $k = \frac{2}{3}$ . . . . .	41
<b>3.</b>	<b>Modelo de la máquina de inducción simétrica</b>	<b>43</b>
3.1.	Modelo en $abc$ . . . . .	46
3.1.1.	Ecuaciones de voltaje en variables de máquina . . . . .	47
3.1.2.	Modelo en enlaces de flujo ( $\lambda$ ) para la simulación de la máquina de inducción en $abc$ . . . . .	54
3.2.	Modelo en $dq0$ . . . . .	57
3.2.1.	Transformación de las ecuaciones de $abc$ al marco de referencia arbitrario $dq0$ . . . . .	59
3.2.2.	Modelo en enlaces de flujo ( $\lambda$ ) para la simulación de la máquina de inducción en $dq0$ . . . . .	65
3.3.	Modelado mediante la teoría generalizada de máquinas . . . . .	68
3.3.1.	Elementos de la teoría generalizada . . . . .	69
3.3.2.	Obtención del modelo en corrientes ( $i$ ) de la máquina de inducción mediante la teoría generalizada . . . . .	73
<b>4.</b>	<b>Simulación de la máquina de inducción con no linealidades</b>	<b>81</b>
4.1.	Ecuaciones diferencio-algebraicas . . . . .	82
4.2.	Simulación del modelo lineal de la máquina de inducción con contingencias	84
4.2.1.	Simulación en $abc$ durante una falla monofásica y una falla trifásica	85
4.2.2.	Simulación en $dq0$ durante una falla monofásica y una falla trifásica	92
4.3.	Simulación del modelo no lineal de la máquina de inducción . . . . .	99

<b>5. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>105</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	105
5.2. Trabajos Futuros . . . . .	106
<b>Apéndice A. Identidades trigonométricas</b>	<b>107</b>
A.1. Fórmulas para el producto de senos y cosenos . . . . .	107
A.2. Fórmulas para la suma y diferencia de ángulos dobles . . . . .	107
A.3. Fórmulas para relaciones trifásicas . . . . .	108
<b>Bibliografía</b>	<b>111</b>



# Índice de figuras

2.1. Representación de dos senoides defasadas en función de $\omega t$ . . . . .	14
2.2. Longitud de vectores en dos y tres dimensiones . . . . .	17
2.3. Plano triangular en tres dimensiones con lados $\mathbf{x}$ , $\mathbf{y}$ , y $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ . . . . .	18
2.4. Rotaciones en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	27
2.5. Inversión de los ejes coordenados . . . . .	28
2.6. Devanados de un rotor cilíndrico uniformemente distribuido, de dos polos, tres fases . . . . .	30
2.7. Descomposición vectorial del sistema trifásico balanceado $abc$ en los ejes de referencia ortogonales giratorios $\alpha\beta\gamma$ . . . . .	32
2.8. Descomposición vectorial del sistema ortogonal giratorio $\alpha\beta\gamma$ en los ejes de referencia ortogonales estáticos $dq0$ . . . . .	33
2.9. Modelo idealizado de la máquina síncrona . . . . .	36
3.1. Curvas de magnetización . . . . .	44
3.2. Máquina de inducción simétrica de dos polos, trifásica con conexión estrella	48
3.3. Relaciones de posición y velocidad angular en la transformación marcos de referencia . . . . .	58
3.4. Máquina generalizada de Kron . . . . .	68
3.5. Transformación de la máquina de inducción trifásica a su equivalente máquina primitiva . . . . .	73
3.6. Diagrama esquemático de la máquina primitiva correspondiente a la máqui- na de inducción . . . . .	75
4.1. Plano de rotación definido por los ejes $dq$ . . . . .	82

4.2. Corrientes de $abc$ durante una falla monofásica a tierra en la fase $a$ . . .	87
4.3. Curva característica par velocidad durante una falla monofásica . . . . .	88
4.4. Acercamiento a la curva característica par velocidad durante la falla monofásica . . . . .	89
4.5. Curva característica de velocidad en durante una falla monofásica en $abc$	89
4.6. Acercamiento en la curva característica de velocidad en durante una falla monofásica en $abc$ . . . . .	90
4.7. Corrientes de $abc$ durante una falla trifásica . . . . .	91
4.8. Curva característica par velocidad durante una falla trifásica . . . . .	91
4.9. Formas de onda de la velocidad y el par durante una falla trifásica . . . .	92
4.10. Corrientes en $dq0$ en el marco de referencia síncrono, durante una falla monofásica . . . . .	94
4.11. Corrientes en $dq0$ en el marco de referencia síncrono, durante una falla trifásica . . . . .	95
4.12. Corrientes en $dq0$ en el marco de referencia síncrono usando la transformada clásica de Park, durante una falla monofásica . . . . .	96
4.13. Corrientes en $dq0$ en el marco de referencia síncrono con la transformada clásica de Park, durante una falla trifásica . . . . .	98
4.14. Comparación entre las corrientes $i_d$ obtenidas con la transformación ortogonal de Park y la transformación clásica de Park . . . . .	99
4.15. Comparación curva de magnetización de la tabla 4.3 y con la función arcotangente . . . . .	101
4.16. Longitud del vector ( $i_m$ ) y ángulo con respecto al eje $d_s$ . . . . .	102
4.17. Curva de saturación simulada . . . . .	103
4.18. Comparación fase a en el modelo lineal y no lineal . . . . .	103
4.19. Acercamiento a la comparación fase a en el modelo lineal y no lineal . . .	104

# Índice de tablas

4.1. Parámetros de la máquina de inducción . . . . .	84
4.2. Parámetros simulación de la máquina de inducción en <i>abc</i> . . . . .	86
4.3. Valores de saturación . . . . .	101



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Introducción

En el siguiente trabajo se presenta una reinterpretación y extensión, tanto en el orden matemático como en el orden físico (entendiendo que se puede hablar del mismo), de una de las herramientas matemáticas, que permitió unificar y generalizar el análisis de las máquinas eléctricas.

La teoría de transformación de marcos de referencia, es presentada a partir de la definición de conceptos básicos con la finalidad de dar un soporte matemático, a la interpretación geométrica que se le da a la transformada de Park, la cual puede ser vista como una rotación ortogonal. Se presentan los modelos lineales en enlaces de flujo de la máquina de inducción, tanto en  $abc$  como en el marco de referencia arbitrario  $dq0$  y a manera de ejemplo se muestra el modelo en corrientes utilizando la metodología de la teoría generalizada. Aprovechando las ventajas del enfoque en álgebra lineal, se parte de un sistema ortogonal en tres dimensiones, cuyos ejes se encuentran dados por la matriz de transformación en  $dq0$  para así proponer una corriente de magnetización válida aún bajo condiciones desbalanceadas, la cual aunada a la característica no lineal de la inductancia ajustada por la función arcotangente, posibilita reproducir el fenómeno de saturación.

## 1.2. Antecedentes históricos

Desde la invención de las máquinas eléctricas a mediados del siglo XIX, el estudio y la producción de las mismas, se realizó de manera artesanal. No es sino hasta finales del mismo siglo que el profesor Blondel publica el primer trabajo sistemático y comprensivo sobre las máquinas síncronas. En noviembre de 1899 Blondel presenta su innovador trabajo en el estudio de las máquinas síncronas [Blondel, 1899], la cual fue la primera publicación que analizó la reacción en alternadores, en ella Blondel expone su celebre teoría “reacción de dos armaduras”. Debido a la importancia de la misma en años posteriores se traduce del idioma francés al inglés [Blondel and Mailloux, 1913], donde el autor se propuso explicar y completar esta teoría.

Blondel utilizó en su trabajo, el método de representación gráfica de las condiciones operativas, el cual permite representar las funciones sinusoidales como vectores, permitiéndole obtener el comportamiento dinámico del sistema para cualquier instante de tiempo, esto no se debe de confundir con el método de variables complejas (método fasorial), siendo este último un artificio matemático, que debido a su naturaleza se adecuaba de muy buena manera al análisis del fenómeno físico de la corriente alterna. El método de variables complejas plasma en forma de ecuaciones algebraicas las relaciones que se dan en el método de representación gráfico, sin embargo este último pretende ser válido para cualquier instante de tiempo, no solo para el estado estable como el primero, por lo que las constantes eléctricas de las máquinas están dadas en resistencias y reactancias, estas últimas siendo definidas como en [Steinmetz, 1900], se encuentran solamente afectadas por la velocidad angular y en cuadratura con la resistencia sin necesidad del operador complejo.

El trabajo de Blondel adapta la teoría de reacción de armadura en máquinas de corriente directa al estudio de las máquinas síncronas de polos salientes, esto debido a que él concibió la reacción de armadura como la resultante de dos reacciones, donde llamó reacción directa a aquella producida por la corriente que circula por la reactancia (corriente reactiva) y una reacción transversal la cual es producida por la corriente que circula por la resistencia (corriente activa).

Posteriormente Doherty y Nickle [Doherty and Nickle, 1926], extienden la teoría de Blondel a cualquier máquina síncrona, no solo a la de polos salientes como se hizo en

un principio. Introducen la idea de ejes de simetría a lo que Blondel llamaba reacciones, bautizándolos como son conocidos en la actualidad, *eje directo* y *eje de cuadratura*. Generalizan la idea de la descomposición de la fuerza magnetomotriz (FMM) a lo largo de estos dos ejes, no solo para la fundamental, sino para el análisis armónico de la FMM de la máquina.

Una herramienta extensamente utilizada para la representación de las variables eléctricas de teoría de máquinas eléctricas y sistemas eléctricos de potencia es el método conocido como sistema en por unidad (PU). Concretamente en la teoría de máquinas los sistemas en PU son de gran ayuda durante los cálculos para el diseño de máquinas, esto debido a que hace mucho más sencilla la comparación entre máquinas muy distintas, independientemente de la clase o el tamaño de las mismas.

Sin embargo, hasta este momento la simulación de los modelos de las máquinas eléctricas estaba limitada a la solución en estado estable mediante la utilización de métodos fasoriales como se mencionó anteriormente, es entonces que la invención hecha por Park cobra una mayor importancia. Sus trabajos comienzan en [Park, 1928], donde analiza y expone, el modelo idealizado de la máquina síncrona, en el cual se desprecia la saturación, la histéresis, las corrientes de Eddy y solo se considera la componente fundamental de la FMM. Hace constancia de que este modelo es una aproximación al real, pero es bastante acertado en cuando al comportamiento del mismo. En este trabajo, las ecuaciones que Park presenta son obtenidas, de magnitudes físicas en por unidad que están en función de corrientes y reactancias, lo que provoca que el trabajo de Park sea confuso. Las razones por las cuales su trabajo se pierde en la ambigüedad es debido a que no expone el porqué es necesaria la utilización de un sistema en PU y el uso del mismo lleva a pensar que todo su desarrollo se encuentra dado por éste. Esta problemática se presenta en los trabajos subsecuentes de Park. En [Park, 1929] Park presenta de manera completa su invención, la cual en este punto llamaremos conversión o cambio de variables como lo menciona [Krause et al., 2002], que en efecto reemplazaba las variables (voltajes, corrientes y enlaces de flujo) asociadas con el devanado del estator de una máquina síncrona, con variables asociadas a un devanado ficticio que gira con el rotor. Es decir, referenció las variables del estator a un marco de referencia estático en el rotor. Esto permite eliminar todas las inductancias dependientes del tiempo de las ecuaciones de

voltaje de la máquina síncrona, las cuales existen debido al movimiento relativo de los circuitos eléctricos y a los circuitos eléctricos con reluctancia magnética variable.

Para entender de manera intrínseca el trabajo de Park, es necesario hacer un recuento histórico de los trabajos posteriores a su presentación. Ésto nos permitirá visualizar la evolución en el estudio de las máquinas eléctricas, así como a los personajes que impulsaron el desarrollo de esta rama de la ingeniería eléctrica. Esto persiguiendo la clarificación de lo presentado por Park, para así manipularlo según sean las necesidades de análisis y del usuario.

Seguido a los trabajos de Park, se buscaron otras alternativas para realizar este cambio de variables, como se menciona en [Krause et al., 2002], donde se indica que éste ya no es solo para la máquina síncrona, sino para cualquier máquina de corriente alterna, entre ellos podemos mencionar a Stanley, quien empleo un cambio de variables en el análisis de la máquina de inducción para eliminar las inductancias variantes en el tiempo, para ésto referenció las variables del rotor a un marco de referencia fijo en el estator, Kron también introdujo un cambio de variables que eliminaba las inductancias mutuas variantes en el tiempo mediante la referenciación tanto de las variables del rotor como del estator a un marco que referencia rotatorio que se encontraba girando en sincronismo con el campo magnético rotatorio y Brereton quien también propuso un cambio de variables pero con la diferencia de que él referenció las variables del estator a un marco de referencia fijo en el rotor. De esta idea nace la teoría generalizada de máquinas eléctricas, la cual es propuesta por Kron en [Kron, 1938]. Para él no existía necesidad de estudiar una teoría distinta para cada tipo de máquina, de hecho el método de solución de Kron, es un análisis dinámico de las máquinas eléctricas rotatorias mediante el uso de ecuaciones tensoriales, ya sea para el estado estable o transitorio. Kron logra no solo generalizar la teoría de máquinas mediante la proposición del modelo conocido como “máquina primitiva”, sino que a la vez, logra unificarlas mediante el concepto de “grupo de transformaciones”. La utilización del enfoque de Kron mediante el cálculo tensorial se encuentra más allá de los alcances de esta tesis, no obstante, una explicación más profunda desde el punto de vista del álgebra lineal de los dos conceptos anteriormente mencionados, será presentada posteriormente.

Continuando los trabajos de Park, A. W. Rankin quien en [Rankin, 1944], llama al

cambio de variables propuesto por Park en [Park, 1929] *ecuaciones de Park*, evidencia el uso inherente de un sistema en PU. El sistema en PU que Park postula establece que los enlaces de flujo del estator, los enlaces en el devanado de campo, las corrientes de campo y el voltaje de campo son todos unitarios en circuito abierto a voltaje nominal en el estator [Rankin, 1944]. Este sistema que Park plantea, hace que los coeficientes de las reactancias mutuas de acoplamiento sean distintos, matemáticamente hablando, y físicamente significa que lo que se induce de estator a rotor no es igual a lo que se induce de rotor a estator, lo que provoca que las ecuaciones de Park sean antisimétricas y que el modelo físico que éstas representan sea complicado de interpretar. Las ecuaciones de Park son modificadas por Waring y Crary en [Waring and Crary, 1932], quienes preservan un sistema en PU, físicamente consistente y dimensionalmente correcto, el cual como consecuencia hace a las ecuaciones simétricas, es decir los coeficientes de las reactancias mutuas de acoplamiento son iguales, lo que provoca que la interpretación de las ecuaciones se facilite. Cabe señalar que la visión de Rankin, es completamente pragmática, Rankin diseñaba las máquinas, por lo tanto su interés tiene que ver con cuestiones de construcción como se puede apreciar en sus trabajos posteriores [Rankin, 1945b], [Rankin, 1945c] y [Rankin, 1945a]. En [Rankin, 1945a] se habla de la utilización de los circuitos equivalentes para: el diseño de circuitos de amortiguamiento, determinación del par cuando se logra la sincronización, determinación de las impedancias transitorias y subtransitorias, etc., pero lo más importante que comenta es la forma en que se obtienen los valores de las impedancias en PU. El origen de esta problemática radica en la determinación de la relación de vueltas que se tiene entre los devanados de estator y rotor. Como él mismo lo menciona en [Rankin, 1945b], la relación de vueltas de una máquina síncrona es una cantidad elusiva, es decir no es fácil de cuantificar, no es única y de igual manera se pueden proponer distintos valores que siguen siendo válidos. La importancia de “escoger” y mantener a lo largo de sus cálculos esta relación de vueltas, para Rankin, es que repercutía de manera directa en la armonía del sistema en PU. La relación de vueltas que Rankin utiliza para los devanados del rotor y estator, es una relación equivalente, pero para él en vez de tener una relación de vueltas unitaria, resulta igual de práctico tener una corriente de campo unitaria y derivar de esta corriente la relación de vueltas. El trabajo de Rankin trae luz a lo presentado por Park, lo que sugiere que Park también

estaba construyendo máquinas pero nada de esto es mencionado en sus trabajos. De hecho hasta nuestros días bajo este postulado se sigue presentando la transformada de Park, pero en nuestros días no lo utilizamos en beneficio de ese sistema en PU que Rankin usaba para diseñar las máquinas.

Continuando con el desarrollo de las ecuaciones de Park, desde el punto de vista del diseño de las máquinas eléctricas, encontramos a Concordia, quien trabajaba como ingeniero para General Electric, al igual que sus antecesores, Park, Kron y Rankin. El trabajo de Concordia [Concordia, 1951] es un texto introductorio para los ingenieros de campo en el análisis transitorio de las máquinas síncronas, en él Concordia amalgama los trabajos hechos por sus antecesores, permitiéndole presentar las ecuaciones de Park válidas para cualquier número de circuitos en el rotor, de una manera más elegante y concisa. En este trabajo se puede apreciar, que la utilización de un sistema en PU, no va de la mano con la construcción del modelo matemático de las máquinas, es decir se puede escoger cualquier relación de vueltas, independientemente de como se haya llegado a esa relación, y ya luego permitir al usuario discernir si es conveniente para su análisis incorporar un sistema en PU, el cual también puede ser escogido de manera arbitraria.

Siguiendo el proceso evolutivo Adkins [Adkins, 1959] toma la estafeta y continua el enfoque de Kron para el estudio generalizado de las máquinas de corriente alterna, pero esta vez aplicando álgebra matricial, Adkins es capaz de ver al proceso de reemplazar un conjunto de variables por otro conjunto de variables afines, como una *transformación*. Para él la transformación puede ser considerada netamente como un proceso matemático, pero también es posible asignarle un significado físico a las nuevas cantidades. Adkins comienza proponiendo, que las corrientes del eje directo y del de cuadratura, del nuevo sistema, son corrientes en devanados ficticios que se encuentran alojados en los respectivos ejes, y que cada una de ellas posee el mismo número de vueltas que un devanado de fase, lo que ocasiona que se genere la misma onda de FMM que generan las corrientes de fase. Para la proposición de su transformación, Adkins, en [Adkins and Harley, 1975] utiliza un sistema en por unidad para las unidades mecánicas (máquinas de corriente alterna), en el cual él define a la potencia total suministrada a una máquina eléctrica como la suma de las potencias suministradas a cada uno de los circuitos y es deseable que la potencia instantánea de entrada tenga un valor igual o cercano a la unidad, cuando los

valores de voltaje y corriente en los circuitos principales tengan valores unitarios. Para aquellas máquinas que posean varios circuitos principales es necesario introducir una constante a la fórmula de la potencia, en general este valor constante es el recíproco del número de circuitos principales por los que circula corriente. Este factor a pesar de haber sido obtenido por otras consideraciones, coincide con el propuesto por los antecesores de Adkins, de hecho este factor lleva a que la magnitud de las corrientes del sistema y del sistema transformado se mantenga invariante, pero como él mismo lo menciona provoca que la potencia varíe durante la transformación. Luego de manipulaciones algebraicas y de arreglar la transformación de manera matricial, Adkins desemboca en la proposición de una matriz cuadrada de  $3 \times 3$  cuyas columnas son ortogonales.

Con la llegada de la era digital, la utilización de las computadoras cambió por completo el enfoque de análisis de las máquinas eléctricas, en 1965 Krause presenta [Krause and Thomas, 1965], en donde el desarrollo de las ecuaciones de Park es completamente distinto a lo presentado anteriormente. El uso de las computadoras permitió simular el comportamiento de las máquinas eléctricas para cualquier instante de tiempo, condiciones de contingencia, alimentación balanceada o desbalanceada, pequeñas oscilaciones, etc. Como se mencionó previamente, se tenían distintos marcos de referencia y por ende distintos cambios de variables al propuesto por Park, donde cada una de estas formas parecía ser adecuada para situaciones muy particulares, consecuentemente cada cambio de variable fue obtenido y tratado de manera separada en la literatura [Krause et al., 2002]. Krause se da cuenta que resulta innecesario, considerar cada marco de referencia de manera separada, en cambio resulta conveniente desarrollar ecuaciones para un marco de referencia arbitrario y de estas ecuaciones generalizadas, obtener las ecuaciones transformadas para cualquier marco de referencia, ya sea que éste esté girando o en paro. En este punto las ecuaciones de Park dejan de ser llamadas de esta forma, para entonces así llamarlas como se conocen hoy en día *transformada de Park*.

Cabe hacer mención a otros trabajos destacados como [Lewis, 1959], [Harris et al., 1970] y [O’Kelly and Simmons, 1968], en el primero Lewis presenta a partir de consideraciones bastante similares a las de Concordia, un cambio de variables que propone una relación de vueltas que provoca que la matriz de transformación sea ortonormal y por ende la potencia sea invariante durante la misma. El segundo es una monografía especializada,

hecha para clarificar la utilización de los sistemas en PU en el área de máquinas eléctricas, con el objeto de proveer en un solo tratado unificador una discusión amplia y profunda del tema. En él se abordan algunos de los trabajos comentados anteriormente, meramente desde el punto de vista de los sistemas en PU, lo que permite apreciar el proceso completo para el establecimiento del mismo, en caso de que éste sea requerido. En el tercero O'Kelly presenta su trabajo siguiendo las ideas propuestas por Kron, pero desde el punto de vista del álgebra matricial, presentando en él la construcción de la transformada de Park a partir de diagramas circuitales, idea que será retomada más adelante.

Otro autor destacado es W. J. Gibbs, quien a pesar de retomar los trabajos de Kron, en el sentido de la utilización de la misma herramienta matemática para el estudio de las máquinas eléctricas, plantea ideas que contrastan con las de [Kron, 1938] y [Adkins, 1959], en el sentido de que una vez transformado el sistema no existe ninguna necesidad de asociar algún tipo de significado físico a éste, como lo explica en [Gibbs, 1962]. En este texto Gibbs, aprovecha para utilizar el análisis matricial como tema introductorio al uso de tensores, lo cual hace en [Gibbs, 1967]. En estos textos, los cuales son complementarios entre sí, el autor no ve la necesidad de usar transformaciones de tres ejes a tres ejes, él utiliza a lo largo de su trabajo la teoría de dos ejes, es decir el análisis de las máquinas lo hace sobre un plano, lo que implica que sus consideraciones son siempre bajo condiciones balanceadas y en estado estable.

Cabe resaltar que hasta este punto se ha hecho una revisión del tema en literatura especializada en el área de máquinas eléctricas, donde algunas de las fuentes si no es que la gran mayoría han sido icónicas en sus respectivas épocas, sin embargo no está de más discutir la forma en que otra área de la ingeniería eléctrica concretamente el área de análisis de sistemas de potencia aborda este tema. En este enfoque el análisis de Park se centra en la máquina síncrona, en la gran mayoría de autores, se presenta a manera de definición la transformada ortonormal de Park, por mencionar algunos, encontramos a Bergen [Bergen and Vittal, 1999] y a Grainger [Grainger and Stevenson, 1994] quienes reconocen a esta transformada como la versión modificada de Lewis. Otros que también utilizan esta transformada son Anderson [Anderson and Fouad, 2003] y Machowski [Machowski et al., 2008], quienes construyen la transformación de Park de manera similar a Adkins, cambiando ciertas consideraciones, sin embargo estos dos autores si dejan

constancia de la razón por la cual se prefiere trabajar con la transformación ortonormal, de igual manera que se hace en este trabajo y se explicará con mayor detalle más adelante. Por último tenemos a Kundur [Kundur et al., 1994], quien es más atrevido en el sentido de que ahonda demasiado en el modelo de la máquina síncrona, para ser un libro de sistemas de potencia. Kundur enfatiza en dar un significado físico al sistema transformado en favor de cantidades en por unidad, esta proposición puede llevar a ciertas interpretaciones erradas. De igual manera que la monografía [Harris et al., 1970], Kundur aboga por la utilización de sistemas en PU, por lo que resulta ser más ventajoso utilizar la transformación propuesta por Park que luego fue modificada por Crary, esto puede llevar a la idea de que alguna de las transformaciones es incorrecta, sin embargo todo depende del uso y justificación que se haga de la misma.

En la era actual se ha seguido la tendencia propuesta en [Krause and Thomas, 1965] elaborada por Krause , que como ya se comentó, deja de lado las consideraciones de construcción y parte de las relaciones trigonométricas que existen entre los devanados del sistema eléctrico. Entre algunos de los autores que presentan trabajos relacionados a este tema podemos encontrar el trabajo de Sivanagaraju [Sivanagaraju and Sreenivasan, 2010] y el de Vukosavic [Vukosavic, 2012] donde diversas opciones dentro de la familia de transformaciones que es la transformada de Park son exploradas en función del análisis que se desee realizar, esto se explicará y demostrará más adelante.

La necesidad de una literatura tan vasta es justificada, debido a que permite observar desde un comienzo el planteamiento de las ideas por parte de mismos artífices de las teorías que revolucionaron el mundo de la ingeniería, permitiéndonos estar exentos de las versiones interpretadas por terceros que lejos de ayudar, provocan ideas erradas en los conceptos.

### **1.3. Justificación**

A lo largo de la historia, la teoría de máquinas eléctricas ha tenido innumerables interpretaciones, no es sino hasta el trabajo de Kron [Kron, 1938], que a pesar de la metodología empleada por él, se logra plantear una teoría generalizada y unificadora, cuyos alcances no han sido explorados en su totalidad hasta nuestros días. Dando

continuación a los trabajos de Kron, como se menciona en la sección 1.2 se encuentran, Gibbs [Gibbs, 1962] y O’Kelly [O’Kelly and Simmons, 1968], quienes haciendo uso del álgebra matricial logran en cierto grado plantear con un nuevo enfoque las ideas de Kron, sin embargo estos textos tienen una clara tendencia a ponderar el análisis del fenómeno físico, descuidando ligeramente el fundamento matemático que soporta la teoría que éstos presentan.

El presente trabajo pretende homologar, las intenciones de los trabajos anteriormente descritos en esta sección, utilizando el enfoque del álgebra lineal y algunos conceptos de la mecánica clásica, intentando encontrar un balance entre los conceptos físicos del sistema de estudio y la construcción de las herramientas matemáticas que soporten las interpretaciones que se hagan del fenómeno físico que subyace al interior de la máquina.

## **1.4. Objetivos**

### **1.4.1. Objetivo general**

El objetivo general de este trabajo de tesis es el estudio de las máquinas eléctricas, particularmente las máquinas de inducción jaula de ardilla, utilizando las herramientas del álgebra lineal, aplicadas a la teoría de transformación de marcos de referencia, así como un recuento a lo largo del tiempo, de la utilización de esta teoría en el análisis de las máquinas, lo que provoca que de manera simultánea se haga una reseña histórica sobre la evolución de la teoría de las máquinas eléctricas.

### **1.4.2. Objetivos particulares**

Los objetivos particulares son los siguientes:

- Interpretación geométrica de la teoría de marcos de referencia.
- Cálculo de la corriente de magnetización válida para condiciones desbalanceadas.
- Inclusión de la característica no lineal de la inductancia.

- Simulación de los modelos de propósito general en  $abc$  y  $dq0$  incluyendo disturbios simétricos y asimétricos

## 1.5. Descripción de los capítulos

En el capítulo uno se da una breve introducción a este trabajo, así como una vasta investigación histórica relativa al estado del arte en lo que a la teoría de devanados respecta, con la intención de remover la opacidad con que se presenta la transformada de Park por parte de algunos autores en la literatura de máquinas eléctricas. Se plantean los objetivos generales, y se justifica la metodología empleada para lograr los fines deseados.

En el capítulo dos se presenta la teoría marcos de referencia, partiendo de la definición de conceptos elementales de acuerdo al enfoque del álgebra lineal. Mediante la utilización de este enfoque se construyen las herramientas necesarias para obtener la transformada ortonormal de Park, la cual es interpretada como una matriz de rotación. Se describen las consecuencias de usar diversas versiones de la transformada de Park, así como una de las maneras más socorridas de formularla en la literatura clásica de máquinas.

En el capítulo tres se muestran las matrices de resistencias e inductancias necesarias para el modelo en enlaces de flujo en  $abc$ , y a partir de éstas mediante la utilización de la matriz ortonormal de Park se obtiene el modelo en  $dq0$ , el cual permite variar el marco de referencia, permitiendo eliminar la dependencia de la posición angular de las inductancias mutuas. También se presenta a manera de tema introductorio a la teoría de Kron el modelo en corrientes de la máquina a partir de consideraciones de la teoría generalizada con la finalidad de mostrar aunque sea de manera superficial, las bondades y virtudes de este enfoque.

En el capítulo cuatro se presentan casos de simulación de los modelos lineales de  $abc$  y  $dq0$  establecidos en el capítulo anterior, con la finalidad de analizar el desempeño, de la máquina de inducción en estado transitorio, en estado estable y durante contingencias de tipo simétrico y asimétrico. Posteriormente se propone la saturación de la trayectoria principal del flujo de magnetización, haciendo uso de la interpretación geométrica que se hace en [Lipo, 2012] y de la fórmula usada en [Therrien et al., 2013] para calcular la magnitud de la corriente de magnetización. Se compara el modelo lineal con el modelo no

lineal, para cuantificar el efecto que tiene la saturación de la inductancia de magnetización en la respuesta de la sistema.

En el capítulo cinco se tienen las conclusiones, algunas recomendaciones y propuestas para trabajos futuros.

## Capítulo 2

# Teoría de marcos de referencia

El estudio de las máquinas eléctricas mucho antes de la llegada de la era digital, se realizaba principalmente mediante la utilización de dos métodos de solución, como lo comenta Steinmetz [Steinmetz, 1900]: el método gráfico y el método fasorial. En el presente trabajo una combinación de las herramientas computacionales y ciertas consideraciones del método gráfico son utilizados, por lo que clarificar la diferencia entre los dos primeros métodos resulta apropiado.

En este capítulo se muestra la construcción de la transformada de Park mediante la utilización del álgebra lineal, y debido a las distintas propiedades que posee la misma, la transformada de Park puede ser abordada sin las complejidades de las ecuaciones de la máquina de inducción. Este enfoque permite establecer de manera concisa varios de los conceptos básicos que utilizaremos para interpretar de manera geométrica el efecto de la transformación.

La idea principal detrás de la interpretación geométrica después de aplicar la transformación ortogonal, radica en concebir a los vectores trifásicos en un sistema ortonormal, es decir en un espacio tridimensional (en  $\mathbb{R}^3$ ) y no contenidos en un plano como lo marca la teoría clásica. Esta forma de concebir la teoría concerniente a los sistemas trifásicos fue presentada por primera vez por Lipo [Lipo, 1984] quien la considera una extensión del espacio tridimensional cartesiano.

## 2.1. Nociones preliminares

Una senoide es una señal que tiene la forma de una función seno o coseno. De manera analítica se puede definir como en (2.1) y de manera gráfica como en la figura 2.1:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (2.1)$$

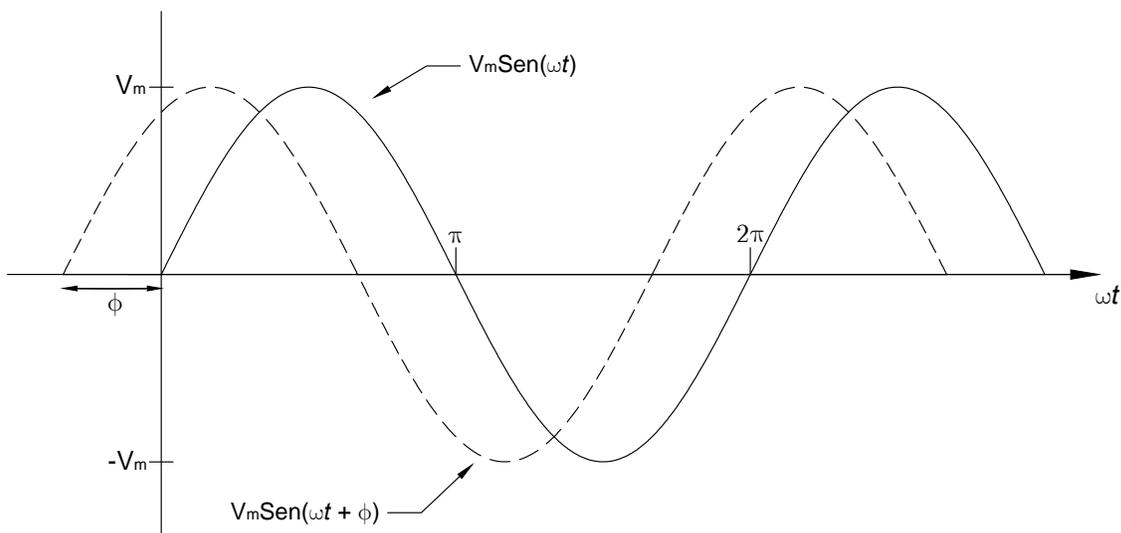
Donde:

$v(t)$  = Es la función evaluada para cualquier instante  $t$ .

$V_m$  = Es la amplitud o valor pico de la senoide.

$\omega$  = Frecuencia angular en radianes sobre segundo  $2\pi f$ .

$\phi$  = Ángulo de defasamiento.



**Figura 2.1:** Representación de dos senoides defasadas en función de  $\omega t$

Las senoides se expresan fácilmente en términos de fasores, con los que es más cómodo trabajar que con las funciones seno y coseno, de la definición de [Alexander and Sadiku, 2006]:

**Definición.** Un **fasor** es un número complejo que representa la magnitud y la fase de una senoide. La idea de la representación fasorial se basa en la identidad de Euler. En general,

$$e^{\pm j\phi} = \cos \phi \pm j \text{sen } \phi$$

Donde:  $j = \sqrt{-1}$

Los fasores brindan un medio sencillo para analizar circuitos lineales excitados por fuentes senoidales. La noción de resolver circuitos de corriente alterna usando fasores la propuso originalmente Charles Steinmetz [Steinmetz, 1900]. Dado que un fasor posee magnitud y fase (dirección), se comporta como un vector el cual se representa de la siguiente forma,  $\mathbf{v} = V_m \angle \phi$ , donde  $V_m$  es la amplitud o valor pico de la señal sinusoidal y  $\phi$  es la fase o ángulo de la misma.

Puede resumirse la transformación del dominio temporal al dominio fasorial de la siguiente manera:

$$v(t) = \underbrace{V_m \cos(\omega t + \phi)}_{\text{Representación en el dominio temporal}} \sim \underbrace{\mathbf{v} = V_m \angle \phi}_{\text{Representación en el dominio fasorial}}$$

- 1) La representación fasorial sólo se aplica cuando la frecuencia es constante.
- 2) La frecuencia no se muestra explícitamente en la representación en el dominio fasorial, porque  $\omega$  es constante. Por esta razón, el dominio fasorial también se conoce como dominio frecuencial.
- 3) Se aplica en la manipulación de dos o más señales senoidales sólo si son de la misma frecuencia.
- 4) Una de las aplicaciones importantes de los fasores es su utilidad en la determinación de la solución en estado estable, la cual no requiere conocer los valores iniciales de las variables implicadas.

En tiempos pasados el método gráfico, el cual empleaba al álgebra vectorial, definía un plano de forma tal que el eje de las ordenadas correspondía a los elementos que aportaban energía activa (watteds) mientras que en el eje de las abscisas correspondía a los elementos no aportaban energía activa (wattless), este último era simplemente indicado por el factor de la frecuencia angular  $\omega$  como lo menciona [Blondel and Mailloux, 1913], donde las relaciones que se establecían dentro de este plano eran consideradas vectores. Este método resultaba muy ambicioso para aquellos tiempos, ya que pretendía obtener la respuesta completa del sistema, entendiéndose estado estable y estado transitorio, mediante la interpretación de las relaciones geométricas que se formulaban. De este método se rescata

la idea de obtener el comportamiento del sistema para cualquier instante de tiempo, y el hecho de considerar como vectores, que efectivamente lo son, a estas cantidades que varían de un instante a otro, por que de la definición de senoide (2.1), se rescata el concepto de valor instantáneo el cual se define de la siguiente manera:

**Definición.** *Definiendo a las cantidades o **valores instantáneos** como aquellos valores que toma la función senooidal  $v(t)$  en cualquier instante de tiempo, donde este valor describe una posición en el espacio, no necesariamente en un plano como marca la teoría clásica, el cual se encuentra definido por cualquier conjunto de ejes coordenados, lo que implica que las coordenadas de este punto pueden ser tratadas de forma vectorial, lo que comunmente se llama vector de posición.*

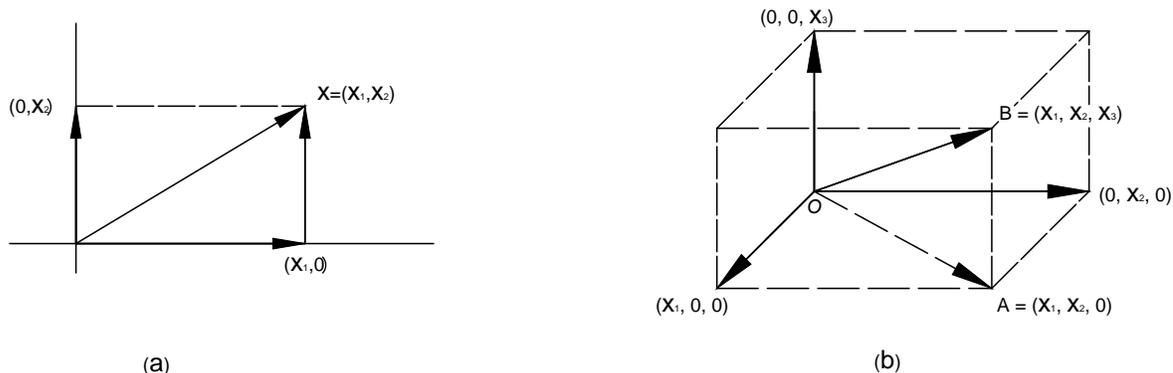
Conviene subrayar las diferencias entre  $v(t)$  y  $\mathbf{v}$ .

- 1)  $v(t)$  es la representación instantánea o en el dominio temporal, mientras que  $\mathbf{v}$  es la representación de frecuencia o en el dominio fasorial.
- 2)  $v(t)$  depende del tiempo mientras que  $\mathbf{v}$  no.
- 3)  $v(t)$  siempre es real y no tiene ningún término complejo, mientras que  $\mathbf{v}$  es generalmente compleja.
- 4)  $v(t)$  es válida para cualquier instante de tiempo, es decir contiene la información dinámica (estado estable y transitorio) del sistema, mientras que  $\mathbf{v}$  es solamente válido para el estado estable.

### 2.1.1. Longitud de un vector

El primer paso en esta sección es encontrar la longitud de un vector para lo cual se seguirá la línea de pensamiento de [Strang, 1976]. En dos dimensiones, esta longitud  $\|\mathbf{x}\|$  es la hipotenusa de un triángulo rectángulo Figura 2.2a, la cual fue dada hace mucho tiempo por Pitágoras:  $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ .

En el espacio tridimensional, el vector  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  es la diagonal de la caja de la figura 2.2b, y su longitud viene de aplicar dos veces la fórmula de Pitágoras. Primero, el caso bidimensional se aplica para la diagonal  $OA = (x_1, x_2, 0)$  la cual pasa a través de la



**Figura 2.2:** Longitud de vectores en dos y tres dimensiones

base, resultando  $\overline{OA^2} = x_1^2 + x_2^2$ . Ésta forma un ángulo recto con el lado vertical  $(0, 0, x_3)$ , de modo que se puede recurrir nuevamente a Pitágoras (en el plano de  $OA$  y  $AB$ ). La hipotenusa del triángulo  $OAB$  es la longitud  $\|\mathbf{x}\|$  que se busca, la cual está dada por:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \overline{OA^2} + \overline{AB^2} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

La generalización a un vector de  $n$  dimensiones,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , es inmediata.

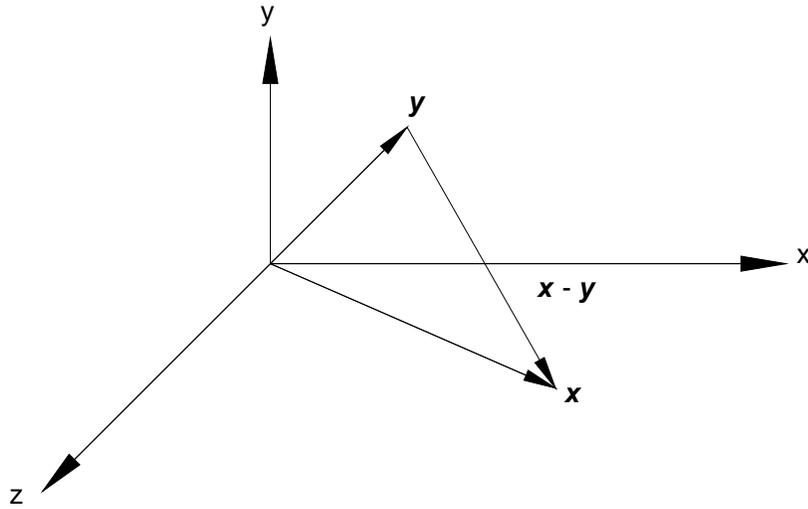
**La longitud  $\|\mathbf{x}\|$  de un vector en  $\mathbb{R}^n$  es la raíz cuadrada positiva de:**

$$\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad (2.2)$$

Geoméricamente esto se obtiene aplicando  $n - 1$  veces el teorema de Pitágoras, adicionando una dimensión más en cada paso.

### 2.1.2. Ortogonalidad entre vectores

Supóngase ahora que se tienen dos vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  como se muestra en la Figura 2.3. ¿Cómo se puede saber si son o no son perpendiculares? en otras palabras ¿Cuál es el criterio de ortogonalidad? Esta es una pregunta que puede ser contestada en el plano bidimensional mediante el uso de trigonometría; es necesaria la generalización a  $\mathbb{R}^n$ , pero aun ahí se puede permanecer en el plano generado por  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ .



**Figura 2.3:** Plano triangular en tres dimensiones con lados  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ , y  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$

Dentro de este plano,  $\mathbf{x}$  es ortogonal a  $\mathbf{y}$  si forman un triángulo rectángulo. Usando la fórmula de Pitágoras como criterio de prueba:

$$\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \quad (2.3)$$

Aplicando la fórmula (2.2), esta condición se transforma en

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + (y_1^2 + \cdots + y_n^2) = (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2$$

Desarrollando los binomios cuadrados del lado derecho se tiene:

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - 2(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) + (y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

Así la igualdad (2.3) es válida y los vectores  $x$  y  $y$  son ortogonales siempre que el producto de los "términos cruzados" sea cero:

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0 \quad (2.4)$$

Nótese que esta cantidad es igual a  $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ , el producto de una matriz de 1 por  $n$  (el vector fila  $\mathbf{x}^T$ ) con una matriz de  $n$  por 1 (el vector columna  $\mathbf{y}$ ):

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \quad (2.5)$$

Esta combinación a menudo se llama producto escalar, producto punto de dos vectores o producto interno y se denota por  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  o  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ , en nuestro caso se llamará producto interno y mantendremos la notación  $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ .

En conclusión la cantidad  $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$  es el producto interno de los vectores columna  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  en  $\mathbb{R}^n$ , y ésta es cero si y solo si  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  son ortogonales.

Aprovechando la notación del producto interno en (2.5), ésta se puede usar para obtener la longitud de un vector, calculando el producto interno de un vector cualesquiera  $\mathbf{x}$  consigo mismo se obtiene una expresión equivalente a la del lado derecho de (2.2):

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \quad (2.6)$$

### 2.1.3. Propiedades de las matrices ortonormales

Antes de abordar el tema de las matrices ortonormales, es necesario definir tres conceptos fundamentales del algebra lineal, esto dará la base matemática para establecer ciertas características y propiedades de las matrices ortonormales [Strang, 1976].

**Definición.** Una **base** para un espacio vectorial es un conjunto de vectores que poseen dos propiedades al mismo tiempo.

1. Es linealmente independiente
2. Genera todo el espacio

**Definición.** Se dice que un conjunto de vectores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  es **linealmente independiente** si la única combinación que da el vector cero es:  $0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$ . En consecuencia la independencia lineal significa que:

$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = \mathbf{0}$  solamente es cierta cuando todos los coeficientes  $c$  son cero

**Definición.** Si un espacio vectorial  $V$  es conformado por todas las combinaciones lineales de los vectores particulares  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ , entonces estos vectores **generan** el espacio. Dicho

en otras palabras, cada vector  $\mathbf{v}$  en  $V$  puede ser expresado como alguna combinación de los vectores  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + c_n \mathbf{w}_n \text{ para algunos coeficientes } c$$

Partiendo de la definición de base expuesta previamente, se dice que una base  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  es *ortonormal* si cumple con las siguientes características.

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{cuando } i \neq j & \text{dando la ortogonalidad} \\ 1 & \text{cuando } i = j & \text{dando la normalización} \end{cases} \quad (2.7)$$

De la sección 2.1.2 se puede comprobar que ésta es la condición de ortogonalidad, y en conjunto a la sección 2.1.1 se define el concepto de normalización.

**Definición.** La *normalización* de una base es la división de cada vector  $\mathbf{v}$  que conforma a la misma entre su longitud, como fue definido en la sección 2.1.1. De tal forma que:

$$\text{Normalización de un vector} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Aplicando este paso a todos los vectores que conforman la base, se permite cambiar de una base simplemente ortogonal a una base ortonormal. Una vez los vectores normalizados también se les llama vectores unitarios.

Supóngase que se tiene una matriz cuadrada  $\mathbf{Q}$  y que sus columnas son ortonormales, en este apartado utilizaremos este símbolo ( $\mathbf{Q}$ ) para referirnos únicamente y exclusivamente a las matrices de este tipo. En la literatura se le llama a este tipo de matrices, matrices ortogonales a pesar de que sus columnas son algo más que ortogonales [Strang, 1976], en esta sección y en todo el texto se les llamará matrices ortonormales para remarcar la diferencia entre estos dos conceptos.

Es entonces hasta este punto conveniente y necesario presentar las propiedades de las matrices ortonormales.

**Propiedad 1:** Una matriz  $\mathbf{Q}$  con columnas ortonormales satisface  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$

*Demostración.* Si las columnas de  $\mathbf{Q}$  son ortonormales, entonces:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \text{---} \mathbf{q}_1^T \text{---} \\ \text{---} \mathbf{q}_2^T \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \mathbf{q}_n^T \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & & \mathbf{q}_n \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

□

**Propiedad 2:** La multiplicación por una matriz ortonormal  $\mathbf{Q}$  preserva las longitudes:

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$$

y también preserva los productos internos

$$(\mathbf{Q}\mathbf{x})^T (\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

*Demostración.* La demostración resulta ser inmediata, primero para la preservación de los productos internos aplicando las propiedades de la matriz transpuesta se tiene:

$$(\mathbf{Q}\mathbf{x})^T (\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{y}$$

Aplicando la Propiedad 1 se tiene.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{I}\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

Ahora para la preservación de la longitud de vectores, usando (2.6) la forma equivalente mediante el producto interno para calcular la longitud de un vector :

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{Q}\mathbf{x})^T (\mathbf{Q}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$$

Eliminando los cuadrados de los términos de las orillas de la expresión anterior se obtiene y se demuestra que:

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$$

□

**Propiedad 3:** El determinante de una matriz ortonormal es igual a  $\pm 1$ .

*Demostración.* Utilizando de la Propiedad 1 el hecho de que  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , aplicando el determinante a ambos lados de la igualdad se tiene:

$$\det(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) = \det(\mathbf{I})$$

Por propiedades de los determinantes podemos reescribir la igualdad de la siguiente forma:

$$\det(\mathbf{Q}^T) \det(\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{I})$$

De [Shilov and Silverman, 1971] se utiliza la propiedad de que el determinante de una matriz cualquiera es igual al determinante de la misma matriz transpuesta es decir  $\det(\mathbf{Q}^T) = \det(\mathbf{Q})$  y que el determinante de la matriz identidad  $\mathbf{I}$  es igual a 1. Haciendo uso de ambas propiedades se tiene entonces:

$$\det(\mathbf{Q}) \det(\mathbf{Q}) = 1$$

De las propiedades de los determinantes, sabemos que el producto de dos determinantes es igual al determinante del producto con lo que se puede reescribir.

$$\det(\mathbf{Q}\mathbf{Q}) = 1$$

Igualmente de las propiedades de los determinantes, al tener la misma matriz en el determinante del producto, se puede escribir en forma cuadrática:

$$(\det(\mathbf{Q}))^2 = 1$$

Obteniendo la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad, se termina la demostración.

$$\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$$

El significado geométrico de esta propiedad se discutirá en la subsección 2.1.4.  $\square$

**Propiedad 4:** El producto de dos matrices ortonormales es una matriz ortonormal

*Demostración.* La propiedad 4 se puede reformular de la siguiente manera, considerando dos matrices ortonormales  $\mathbf{Q}_1$  y  $\mathbf{Q}_2$  que cumplen con la Propiedad 1, es decir  $\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}$ , entonces esta propiedad establece que el producto de  $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_3$  donde esta

tercer matriz debe ser ortonormal, por lo que también debe de cumplir con la Propiedad 1 es decir  $\mathbf{Q}_3^T \mathbf{Q}_3 = \mathbf{I}$ . Sustituyendo la matriz  $\mathbf{Q}_3$  por el producto de las matrices  $\mathbf{Q}_1$  y  $\mathbf{Q}_2$  en esta última expresión se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_3^T \mathbf{Q}_3 &= (\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2)^T (\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2) \\
 &= (\mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_1^T) (\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2) \\
 &= \mathbf{Q}_2^T (\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1) \mathbf{Q}_2 \\
 &= \mathbf{Q}_2^T (\mathbf{I}) \mathbf{Q}_2 \\
 &= \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_2 \\
 &= \mathbf{I}
 \end{aligned}$$

En general y al igual que en el producto matricial la propiedad conmutativa no se cumple es decir  $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \neq \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1$  □

#### 2.1.4. Transformaciones ortogonales

Una de las transformaciones más sencillas y útiles en la interpretación de problemas físicos es la ortogonal, sin embargo antes de definirla de manera propia, es necesario que se haga una revisión de ciertos conceptos básicos.

Se empieza definiendo la noción general de un mapeo, utilizando la definición de [Lange, 2002], téngase entonces dos conjuntos no vacíos  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{C}'$ , un mapeo de  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{C}'$  es una asociación o regla mediante la cual los elementos de  $\mathbf{C}$  se relacionan con los elementos de  $\mathbf{C}'$ . De acuerdo a [Lowenthal, 1975], mapeos, operadores, funciones y transformaciones son básicamente sinónimos, con la sutil diferencia de los objetos matemáticos que cada uno de estos maneja.

En este caso se hace uso del término transformación o transformaciones, el cual se asocia con el producto matricial. Dicho en otras palabras y de acuerdo a [Strang, 2003] el producto matricial es por si mismo una transformación. Del concepto anterior definiremos de manera análoga que cuando una matriz  $\mathbf{A}$  multiplica un vector  $\mathbf{v}$ , ésta transforma a  $\mathbf{v}$  en otro vector  $\mathbf{A}\mathbf{v}$ . En resumen, entra un vector  $\mathbf{v}$  y a la salida se obtiene  $\mathbf{A}\mathbf{v}$ .

De hecho el producto matricial no es cualquier tipo de transformación [Strang, 2003]. Comenzando nuevamente con una matriz  $\mathbf{A}$ , ésta transforma  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{Av}$ , y transforma  $\mathbf{w}$  en  $\mathbf{Aw}$ . Entonces se sabe qué es lo que le sucede a  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ . En consecuencia no debe de existir ninguna duda de que  $\mathbf{Au}$ , tiene que ser igual a  $\mathbf{Av} + \mathbf{Aw}$ . El producto matricial  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$  es por lo tanto una *transformación lineal*.

**Definición.** Una transformación  $T$  asigna una salida  $T\mathbf{v}$  a cada vector de entrada  $\mathbf{v}$ . La transformación será lineal si cumple estos requisitos para todo  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$

$$T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}) \quad (2.8)$$

$$T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v}) \text{ para todo } c. \quad (2.9)$$

Si la entrada es  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , la salida debe de ser  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ . Las condiciones anteriores (2.8) y (2.9) pueden ser combinadas en una sola condición.

**Condición de linealidad:**  $T(c\mathbf{v} + d\mathbf{w})$  debe ser igual a  $cT(\mathbf{v}) + dT(\mathbf{w})$ .

Debido a las propiedades del producto matricial se puede comprobar como consecuencia inmediata la condición de linealidad.

$$\mathbf{A}(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = c\mathbf{A}(\mathbf{v}) + d\mathbf{A}(\mathbf{w}) \quad (2.10)$$

Donde (2.10) es cierta para el producto matricial, debido a que cumple con los requisitos de linealidad. De hecho todas las matrices producen una transformación por la multiplicación  $\mathbf{Av}$  y ésta es lineal y todas las transformaciones lineales están asociadas al producto matricial.

Una forma de reconocer cuales transformaciones son no lineales, es ver si el vector de salida presenta valores cuadráticos, productos o longitudes,  $v_1^2$  ó  $v_1v_2$  ó  $\|\mathbf{v}\|$ , si esto sucede entonces la transformación es no lineal.

*Demostración.* Para demostrar lo establecido previamente, se considera el efecto de la transformación  $T$  sobre cualquier vector. Tomando un vector de la forma,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Donde este vector puede ser reescrito como la combinación lineal de columnas de cualquier base, por simplicidad se toma la base canónica

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reescribiendo el vector  $\mathbf{v}$  se tiene:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + v_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n$$

Aplicando el operador  $T$  al vector  $\mathbf{v}$  y tomando en consideración la condición de linealidad se puede expresar:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= T(v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n) \\ &= v_1 T(\mathbf{e}_1) + v_2 T(\mathbf{e}_2) + \dots + v_n T(\mathbf{e}_n) \end{aligned} \quad (2.11)$$

De (2.11) y de acuerdo a [Shores, 2007] se puede ver cual es la información necesaria para conocer al operador  $T(\mathbf{v})$  para cualquier vector  $\mathbf{v}$ , todo lo que se tiene que saber son los vectores,  $T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \dots, T(\mathbf{e}_n)$ , los cuales pueden escribirse como:

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, T(\mathbf{e}_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

y definen la regla que relaciona los elementos de la base original con la base transformada. Sustituyendo en (2.11)

$$T(\mathbf{v}) = v_1 T(\mathbf{e}_1) + v_2 T(\mathbf{e}_2) + \dots + v_n T(\mathbf{e}_n) = v_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + v_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Reordenando en forma matricial:

$$T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \dots + a_{mn}v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (2.12)$$

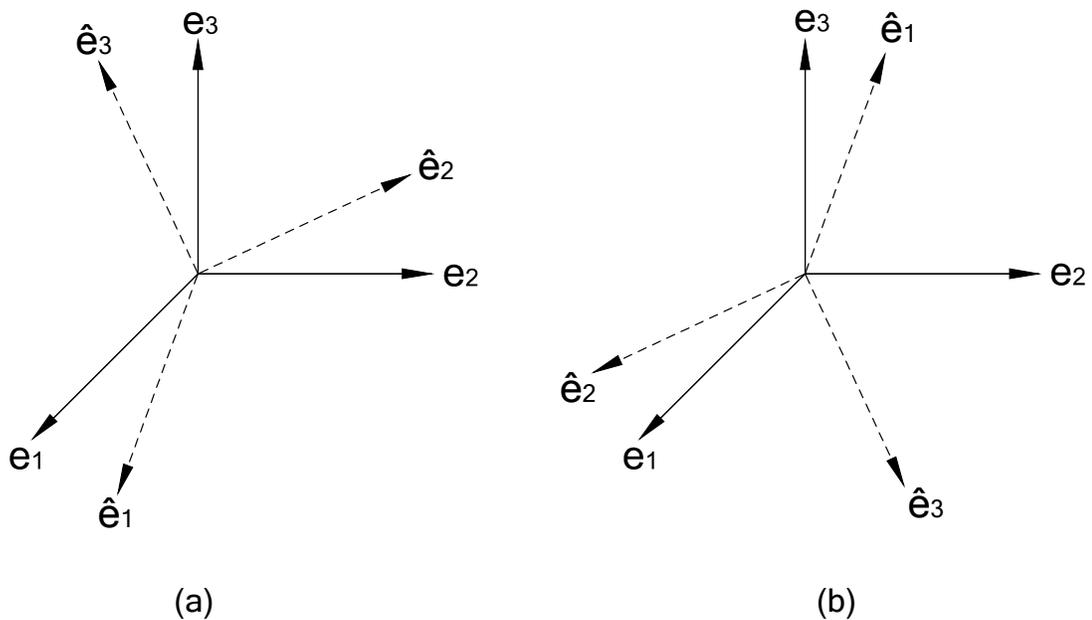
Donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = T(\mathbf{e}) \quad (2.13)$$

□

El concepto de transformación lineal es en cierta manera una idea abstracta de multiplicación matricial y una de las ventajas es que se puede ver lo que la transformación hace a todos los elementos del vector de entrada en una sola operación, es decir se pueden tomar todos los vectores de entrada  $\mathbf{v}$  y obtener su salida  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$ . Sin embargo, lo

último mencionado es una idea un tanto inconclusa, por lo que para completarla y entender por consiguiente de una mejor manera las transformaciones lineales es necesario encontrar y analizar las matrices que subyacen. Empezando con la expresión en (2.12) donde la matriz  $\mathbf{A}$ , especificada en (2.13), está conformada por las columnas transformadas de una base de entrada arbitraria. De acuerdo a esta interpretación, se tiene un vector de entrada  $\mathbf{v}$  al cual se le puede ver como un arreglo de coordenadas de entrada dadas en una determinada base de entrada o de manera más propia como las coordenadas dadas por la combinación lineal de columnas de cualquier base, como se mencionó anteriormente.



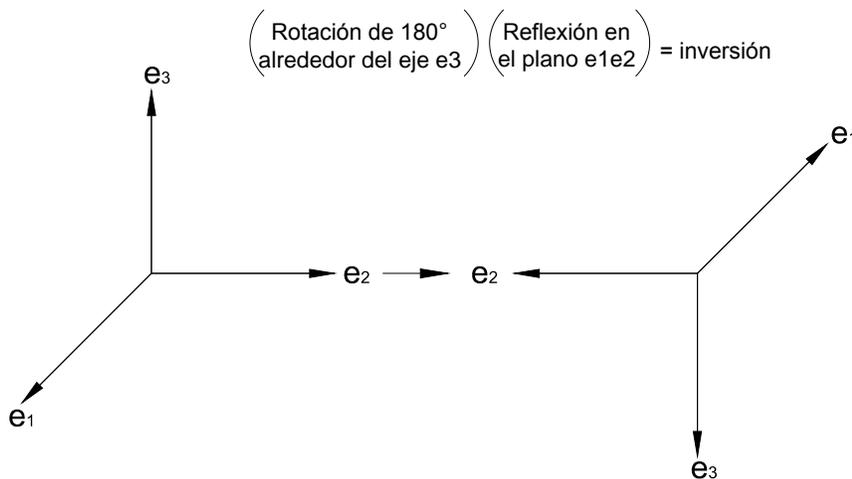
**Figura 2.4:** Rotaciones en  $\mathbb{R}^3$

Este enfoque permite ver al operador  $T$  como la regla mediante la cual se modifica esta base. Particularmente el vector  $\mathbf{A}\mathbf{v}$ , el cual es el resultado de la transformación  $T(\mathbf{v})$ , como se ha dicho reiteradamente, esto permite interpretar a la matriz  $\mathbf{A}$  como la matriz que provee de la base de salida al vector de coordenadas  $\mathbf{A}\mathbf{v}$  de salida, es decir las coordenadas de este vector de salida son la combinación lineal de las columnas de la matriz  $\mathbf{A}$  ponderadas por los elementos del vector  $\mathbf{v}$ , donde los elementos de este vector son las coordenadas de entrada. En resumen, si se sabe lo que  $T$  le hace a cada vector de la base del vector  $\mathbf{v}$  de entrada, entonces se sabe la transformación lineal.

En este punto es conveniente comentar sobre algunos de los distintos tipos de transformaciones lineales representados en forma matricial para así analizar las que sean de la competencia de este trabajo. Entre los más representativos se tienen las proyecciones, las derivadas, las integrales y las rotaciones, siendo estas últimas de interés inmediato.

Como se dijo en un principio, el verdadero interés radica en el análisis de las transformaciones ortogonales las cuales propiamente son transformaciones lineales que rotan el sistema coordenado original a otro, siendo este último definido de tal manera que nos facilite el análisis y la comprensión geométrica de la transformación. Es entonces que aquí cobra importancia la Propiedad 3, la cual nos indica el tipo de rotación a la cual pertenece la transformación. De acuerdo a [Hinchey, 1979] existen dos tipos de rotaciones, las propias, si el determinante de la matriz de rotación es +1 se dice que es una transformación propia o de rotación pura, como se muestra en la figura 2.4a. Las rotaciones propias son rotaciones alrededor de un eje fijo que pasa por el origen.

De la misma forma si el determinante de la matriz es -1, la rotación es una matriz impropia como se muestra en la figura 2.4b.



**Figura 2.5:** Inversión de los ejes coordenados

Las transformaciones impropias tienen el efecto de cambiar el signo de cada una de las componentes o de cambiar los ejes coordenados. Tal operación transforma un

sistema coordinado de mano derecha en uno de mano izquierda y es conocida también como inversión de los ejes coordinados. En la Figura 2.5 se muestra lo que hace una transformación impropia a los ejes coordinados.

Siendo ésta la naturaleza de la operación, es claro que la inversión de un sistema coordinado de mano derecha en un sistema coordinado de mano izquierda no puede ser hecho por cualquier cuerpo rígido o partícula puntual. Una inversión por lo tanto nunca corresponderá al desplazamiento físico de un cuerpo rígido. En conclusión, una transformación que represente el movimiento de un cuerpo rígido trabajado como partícula puntual debe ser restringida a las matrices que tienen determinante  $+1$ .

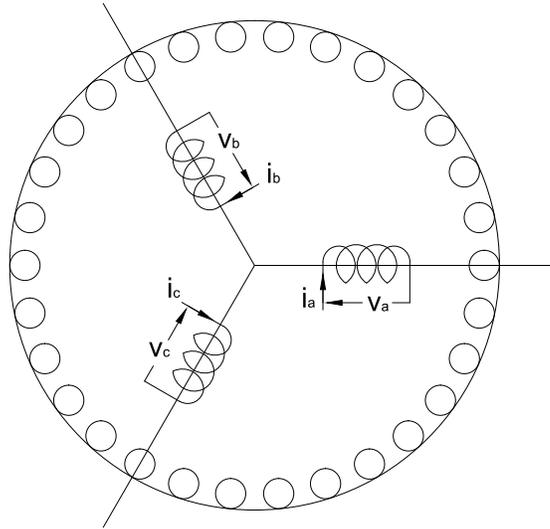
## 2.2. Transformación de marcos de referencia

Las máquinas eléctricas rotatorias, particularmente las máquinas de inducción son sistemas electromecánicos dinámicos, concretamente son sistemas no lineales con coeficientes variantes en el tiempo. Dada esta complejidad en la naturaleza del fenómeno físico a analizar, la implementación de un modelo matemático aproximado resulta ser lo más adecuado en las pretensiones de este trabajo. En esta sección se plantea una forma de lidiar con los coeficientes variantes en el tiempo mediante la utilización de la teoría de transformación de marcos de referencia, que como fue comentado en la sección 1.2 fue concebida en un principio por Park a partir de la idea propuesta por Blondel. En lo que respecta a la parte no lineal del modelo este tema será tratado en el siguiente capítulo

La teoría de transformaciones como ya se comentó es un artificio matemático que puede o no tener significado físico. En este caso, no solo se le dará un significado físico, aunado a las propiedades de las transformaciones ortonormales anteriormente expuestas se le dará una interpretación geométrica. Mediante la utilización del enfoque circuital, que no es otra cosa que partir únicamente de las consideraciones eléctricas del sistema electromagnético, se toma como punto de partida el modelo planar trifásico de parámetros concentrados como se muestra en la figura 2.6.

Esto da pie a tomar, desde el punto de vista de Krause las ecuaciones de Park, las cuales ya no son obtenidas de consideraciones de construcción sino de las relaciones trigonométricas que se tienen entre los ejes del rotor y estator con el eje directo y el eje

de cuadratura. En conjunto con la utilización del álgebra lineal se hace uso de una matriz de transformación que permitirá variar el marco de referencia lo que permitirá eliminar la dependencia del tiempo de los coeficientes del sistema.



**Figura 2.6:** Devanados de un rotor cilíndrico uniformemente distribuido, de dos polos, tres fases

En este apartado se presentan el desarrollo y la demostración de las matrices de transformación necesarias para llevar a cabo las transformaciones de equivalencia entre un sistema trifásico balanceado variante en el tiempo, un sistema ortogonal giratorio y un sistema ortogonal estático.

### 2.2.1. Transformación de $abc$ a $\alpha\beta\gamma$

Considerando un sistema trifásico balanceado que se encuentra girando una velocidad angular  $\omega$  y se quiere descomponerlo en las componentes  $\alpha\beta\gamma$ , las cuales son ortogonales entre sí y también están girando a la velocidad angular  $\omega$ , como se muestra en la Figura 2.7. Donde  $F_a, F_b$  y  $F_c$  son cantidades instantáneas. De aquí en adelante a todas las cantidades a las que se haga referencia, serán consideradas valores instantáneos a menos que de manera expresa se indique lo contrario.

Descomponiendo entonces las cantidades  $F_a, F_b$  y  $F_c$  en los ejes  $\alpha$  y  $\beta$ , como se muestra en la Figura 2.7, se tiene:

$$\begin{aligned} F_\alpha &= F_a - F_b \sin(30^\circ) - F_c \sin(30^\circ) \\ &= F_a - \frac{1}{2}F_b - \frac{1}{2}F_c \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} F_\beta &= F_b \cos(30^\circ) - F_c \cos(30^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}F_b - \frac{\sqrt{3}}{2}F_c \end{aligned} \quad (2.15)$$

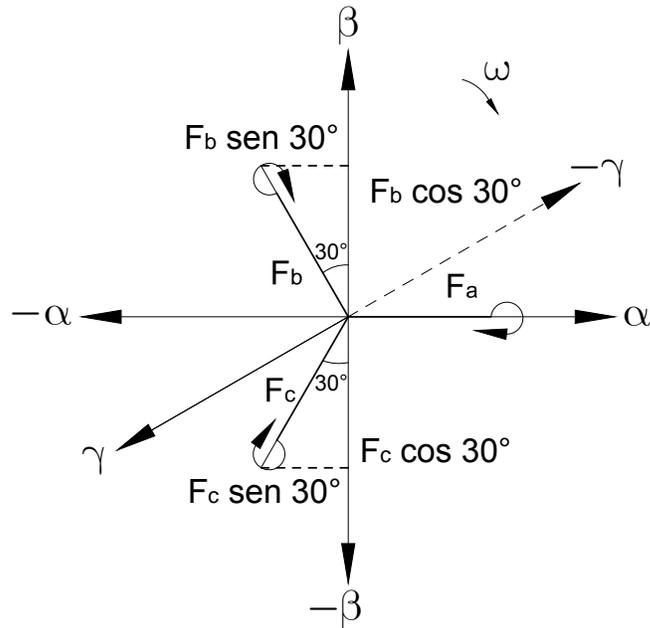
Visto en forma matricial desde el espacio renglón, se tiene:

$$\begin{bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \\ F_c \end{bmatrix}$$

Realizando las comprobaciones pertinentes, se observa que (2.14) y (2.15) son linealmente independientes entre sí, y de su producto interno  $(F_\alpha)^T F_\beta$  se comprueba que son ortogonales (véase sección 2.1.3). Para proponer una base ortogonal, es necesario encontrar un tercer vector que sea ortogonal a los anteriores para así poder generar todo el espacio  $\mathbb{R}^3$ .

Se propone un vector  $Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$  donde  $z_1, z_2$  y  $z_3$  son las componentes de  $F_a, F_b$  y  $F_c$ , respectivamente de tal manera que,  $(F_\alpha)^T Z = 0$  y  $(F_\beta)^T Z = 0$ . Realizando las operaciones correspondientes

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} &= z_1 - \frac{1}{2}z_2 - \frac{1}{2}z_3 = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}z_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_3 = 0 \end{aligned}$$



**Figura 2.7:** Descomposición vectorial del sistema trifásico balanceado  $abc$  en los ejes de referencia ortogonales giratorios  $\alpha\beta\gamma$

Se tiene entonces el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} z_1 - \frac{1}{2}z_2 - \frac{1}{2}z_3 &= 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}z_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo se tiene que:  $z_1 = z_2$  y  $z_2 = z_3$  por lo que se propone cualquier combinación lineal del vector  $Z = k \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ , como vector ortogonal a  $F_\alpha$  y  $F_\beta$ . Cambiando simplemente el nombre del vector  $Z$  a  $F_\gamma$ , y normalizando la base ortogonal propuesta.

$$\|F_\alpha\| = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\|F_\beta\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

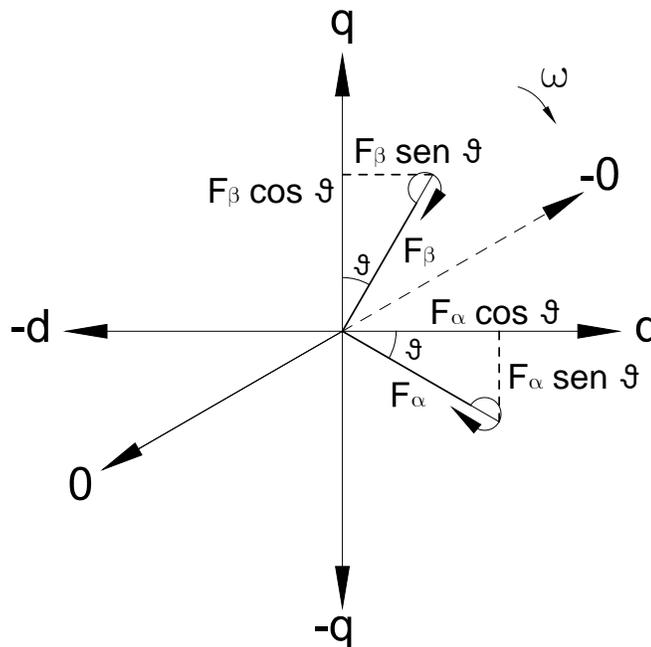
$$\|F_\gamma\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Normalizando cada vector renglón por su correspondiente norma, la base ortonormal en forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \\ F_\gamma \end{bmatrix} = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \\ F_c \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

La cual llamaremos matriz  $\mathbf{M}$  también conocida como la transformada de Clark.

### 2.2.2. Transformación de $\alpha\beta\gamma$ a $dq0$



**Figura 2.8:** Descomposición vectorial del sistema ortogonal giratorio  $\alpha\beta\gamma$  en los ejes de referencia ortogonales estaticos  $dq0$

Tomando los ejes estacionarios  $dq0$  como referencia, la posición de los ejes  $\alpha\beta\gamma$  está definida por el ángulo  $\vartheta$ , siendo entonces la descomposición vectorial como se muestra en

la Figura 2.8.

$$\begin{aligned} F_d &= F_\alpha \cos \vartheta + F_\beta \sen \vartheta \\ F_q &= -F_\alpha \sen \vartheta + F_\beta \cos \vartheta \end{aligned}$$

Donde tanto  $F_q$  y  $F_d$  son linealmente independientes, su producto interno es cero y su norma es unitaria. La base ortonormal, la que se llamará  $\mathbf{R}$  en forma matricial resulta.

$$\begin{bmatrix} F_d \\ F_q \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sen \vartheta \\ -\sen \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Donde  $\mathbf{R}$  es también conocida como matriz de rotación en un plano, es decir es capaz de generar todo el plano  $\mathbb{R}^2$ . Recordando que  $\alpha\beta\gamma$  es un conjunto ortogonal en  $\mathbb{R}^3$ , la componente de  $F_\gamma$  coincide completamente con el eje 0 del nuevo marco de referencia, haciendo evidente que para generar todo el espacio en  $\mathbb{R}^3$ , es necesario simplemente agregar esta componente a la base expresada en (2.17), completando así, no solo la base, sino la base ortonormal para la transformación de  $\alpha\beta\gamma$  a  $dq0$ .

$$\begin{bmatrix} F_d \\ F_q \\ F_0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sen \vartheta & 0 \\ -\sen \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \\ F_\gamma \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

### 2.2.3. Transformación de $abc$ a $dq0$

Habiendo obtenido las transformaciones anteriores resulta bastante intuitivo relacionar la transformación de  $abc$  a  $dq0$ . Viendo en forma compacta (2.16) y (2.18).

$$F_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{M}F_{abc} \quad (2.19)$$

$$F_{dq0} = \mathbf{N}F_{\alpha\beta\gamma} \quad (2.20)$$

Sustituyendo (2.19) en (2.20) se tiene:  $F_{dq0} = \mathbf{NMF}_{abc}$ .

Desarrollando matricialmente.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} F_d \\ F_q \\ F_0 \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sen \vartheta & 0 \\ -\sen \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \\ F_c \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\frac{1}{2} \cos \vartheta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sen \vartheta & -\frac{1}{2} \cos \vartheta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sen \vartheta \\ -\sen \vartheta & \frac{1}{2} \sen \vartheta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \vartheta & \frac{1}{2} \sen \vartheta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \vartheta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \\ F_c \end{bmatrix} \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Recordando las identidades trigonométricas  $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$  y  $\sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , sustituyendo en (2.21):

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos \vartheta \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sen \vartheta \sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos \vartheta \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sen \vartheta \sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sen \vartheta & -\sen \vartheta \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos \vartheta \sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sen \vartheta \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos \vartheta \sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \\ F_c \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

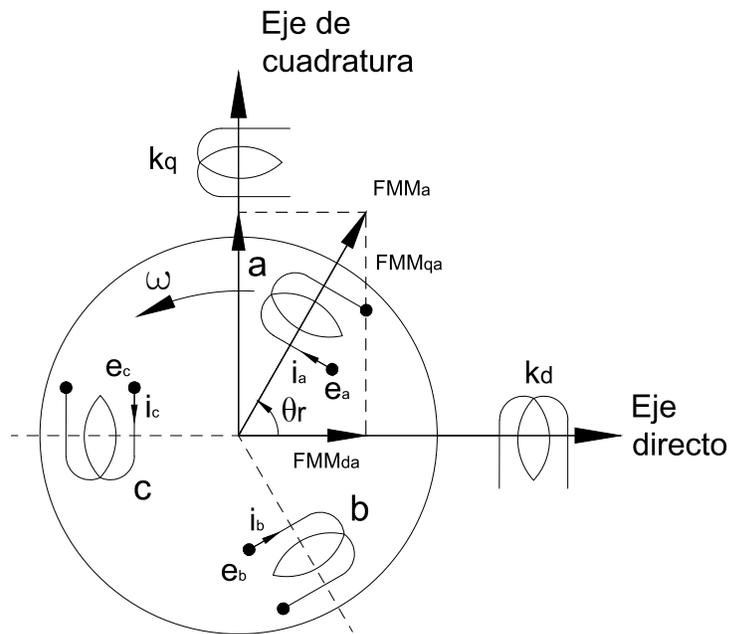
Usando las identidades trigonométricas para ángulos dobles de la sección A.2 y reescribiéndolo en forma matricial se obtiene la base ortonormal para la transformación de un sistema trifásico balanceado a un sistema ortogonal estático, siendo la matriz  $\mathbf{K}$  conocida como la matriz ortonormal de transformación de Park.

$$\begin{bmatrix} F_d \\ F_q \\ F_0 \end{bmatrix} = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sen \vartheta & -\sen\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sen\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \\ F_c \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

#### 2.2.4. Planteamiento clásico de la transformada de Park

El planteamiento presentado anteriormente, no es la única manera de obtener la transformada de Park. Por ejemplo en, [O'Kelly and Simmons, 1968] esta transformación

está basada en el hecho de que el campo magnético rotatorio producido por las corrientes trifásicas del estator de una máquina de corriente alterna, puede ser producido de igual manera por un devanado bifásico que se encuentra en cuadratura. Dicho de otra manera para formar los ejes  $dq$  equivalentes, los cuales llamaron ejes de transformación, es necesario que la fuerza magnetomotriz (FMM) del devanado trifásico original y su versión transformada sean idénticas para cualquier instante de tiempo. Para establecer esa equivalencia de FMM's, primero se asume que las FMM's de fase del devanado trifásico son los valores fundamentales con valores de amplitud  $F_a$ ,  $F_b$ ,  $F_c$ . Para [Adkins, 1959] se plantea una condición de equivalencia basada en corrientes, otros lo hacen en base a los enlaces de flujo y otros lo hacen en función de la construcción de la máquina como se comentó anteriormente. En este apartado se utiliza el enfoque de la FMM para luego extenderlo al uso de corrientes comúnmente utilizado en la literatura.



**Figura 2.9:** Modelo idealizado de la máquina síncrona

La amplitud máxima de onda sinusoidal de la FMM debido a la corriente  $i_a$  en el devanado de fase  $a$  de la figura 2.9 es proporcional a  $i_a$  y ocurre en el eje de la bobina, esto es en la posición angular  $\theta_r$ . La onda de la FMM debida a  $i_a$  entonces puede ser descompuesta en dos componentes, cada una a lo largo del eje directo y el de cuadratura

respectivamente los cuales son ortogonales entre sí. La amplitud de la componente del eje directo debido a la fase  $a$  es:

$$\text{FMM}_{da} = k i_a \cos \theta_r$$

Donde  $k$  es la constante correspondiente al número de vueltas de la bobina.

La componente del eje directo de la onda de la FMM resultante, debido a la acción combinada de las corrientes trifásicas, es por lo tanto de amplitud:

$$\text{FMM}_d = k \left[ i_a \cos \theta_r + i_b \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (2.24)$$

La amplitud de la onda de la FMM debido a la corriente  $i_d$  en la bobina del eje directo estará dada por.

$$\text{FMM}_d = k_m i_d \quad (2.25)$$

Sustituyendo (2.24) en (2.25) y despejando para  $i_d$  se tiene:

$$i_d = \frac{k}{k_m} \left[ i_a \cos \theta_r + i_b \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

Combinando en una sola constante  $k_d$  el número de vueltas para el eje directo y extendiendo de manera similar este razonamiento a las corrientes de cuadratura se obtiene:

$$i_d = k_d \left[ i_a \cos \theta_r + i_b \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (2.26)$$

$$i_q = k_q \left[ i_a \sin \theta_r + i_b \sin \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \sin \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (2.27)$$

La introducción de una nueva corriente es necesaria, la cual llamaremos corriente de secuencia cero, la cual no produce ninguna FMM, ésta está definida como:

$$i_0 = \frac{1}{3} (i_a + i_b + i_c) = k_0 (i_a + i_b + i_c) \quad (2.28)$$

El término de corriente de secuencia cero fue adoptado de manera análoga al término componente de secuencia cero usado en la teoría de componentes simétricas, de hecho  $i_0$

es una condición de equilibrio, es decir para condiciones trifásicas balanceadas, la suma de las corrientes de fase debe de ser cero, por lo tanto el término  $i_0$  también debe de ser cero.

Donde  $k_d$ ,  $k_q$ ,  $k_0$  son constantes por definir.

Ordenando de manera matricial las expresiones (2.26), (2.27) y (2.28) se tiene de manera similar a [Sivanagaraju and Sreenivasan, 2010]:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_d \cos \theta_r & k_d \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & k_d \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \\ k_q \text{sen } \theta_r & k_q \text{sen} \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & k_q \text{sen} \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \\ k_0 & k_0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Ahora es necesario encontrar la matriz de transformación inversa, para esto reescribiremos la matriz de transformación en (2.29) como el producto de dos matrices, para así facilitar las operaciones.

$$\begin{bmatrix} k_d & 0 & 0 \\ 0 & k_q & 0 \\ 0 & 0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \text{sen } \theta_r & \text{sen} \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & \text{sen} \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

La inversa del producto de dos matrices,  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$  donde  $\mathbf{A}$  corresponde a la matriz de constantes y la matriz  $\mathbf{B}$  corresponde a la otra matriz, esta nomenclatura es únicamente válida en este apartado. La inversa de la matriz de constantes, la cual es una matriz diagonal, es una matriz diagonal cuyos elementos son los recíprocos de la matriz original. La matriz inversa de  $\mathbf{B}$ , se calcula de la siguiente forma, por lo que se tiene entonces.

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{B})}{\det(\mathbf{B})} \begin{bmatrix} \frac{1}{k_d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_q} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_0} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Donde  $\text{adj}(\mathbf{B})$  se refiere a la matriz adjunta, la cual está definida como la matriz de cofactores transpuesta de  $\mathbf{B}$ , siendo esta:

$$\text{adj}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \cos \theta_r & -\sqrt{3} \text{sen } \theta_r & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} \text{sen } \theta_r + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_r & \frac{3}{2} \cos \theta_r + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } \theta_r & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \text{sen } \theta_r + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_r & -\frac{3}{2} \cos \theta_r + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } \theta_r & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Para  $\det(\mathbf{B})$  se refiere al determinante de la matriz  $\mathbf{B}$  y éste es igual a  $\det(\mathbf{B}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ , el cual es un escalar que indica que tal matriz es no singular, lo que implica que existe su inversa, sin embargo no ofrece más información de las propiedades intrínsecas de la matriz, es decir si tal matriz es de proyección, rotación, etc. Entonces la matriz inversa resulta:

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{B})}{\det(\mathbf{B})} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \cos \theta_r & -\sqrt{3} \text{sen } \theta_r & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} \text{sen } \theta_r + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_r & \frac{3}{2} \cos \theta_r + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } \theta_r & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \text{sen } \theta_r + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_r & -\frac{3}{2} \cos \theta_r + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } \theta_r & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Reduciendo términos se tiene:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cos \theta_r & \frac{2}{3} \text{sen } \theta_r & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen } \theta_r - \frac{1}{3} \cos \theta_r & -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta_r - \frac{1}{3} \text{sen } \theta_r & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen } \theta_r - \frac{1}{3} \cos \theta_r & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta_r - \frac{1}{3} \text{sen } \theta_r & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Sin embargo se desea que en la expresión (2.33) aparezcan los términos  $\cos(\theta_r \pm \frac{2\pi}{3})$  y  $\text{sen}(\theta_r \pm \frac{2\pi}{3})$ , por lo que es necesario factorizar las identidades que se muestran en la sección A.2.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cos \theta_r & \frac{2}{3} \text{sen } \theta_r & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{2} \cos \theta_r + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } \theta_r \right) & \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{2} \text{sen } \theta_r - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_r \right) & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{2} \cos \theta_r - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } \theta_r \right) & \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{2} \text{sen } \theta_r + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_r \right) & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cos \theta_r & \frac{2}{3} \text{sen } \theta_r & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & \frac{2}{3} \text{sen} \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) & \frac{2}{3} \text{sen} \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Realizando el producto  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ .se tiene la matriz inversa de transformación.

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3k_d} \cos \theta_r & \frac{2}{3k_q} \sin \theta_r & \frac{1}{3k_0} \\ \frac{2}{3k_d} \cos \left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{2}{3k_q} \sin \left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{3k_0} \\ \frac{2}{3k_d} \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{2}{3k_q} \sin \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{3k_0} \end{bmatrix}$$

Siendo entonces la transformación inversa de la expresión (2.29)

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3k_d} \cos \theta_r & \frac{2}{3k_q} \sin \theta_r & \frac{1}{3k_0} \\ \frac{2}{3k_d} \cos \left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{2}{3k_q} \sin \left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{3k_0} \\ \frac{2}{3k_d} \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{2}{3k_q} \sin \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{3k_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Las expresiones (2.29) y (2.35), permiten apreciar a la familia de transformaciones o grupo de transformaciones, que se pueden obtener en los distintos valores que se les puede dar a las constantes  $k_d, k_q$  y  $k_0$ , inclusive se puede adicionar a este grupo de transformaciones, los distintos valor del ángulo  $\theta_r$ , a medida que cambian las ecuaciones con respecto al tiempo, como lo interpretaba Kron en [Kron, 1938]. A continuación se tiene un análisis de las repercusiones de escoger distintos valores para las constantes como se menciona en [Vukosavic, 2012], donde se considera siempre que las tres constantes comparten el mismo valor y las consecuencias de dichos valores tomados se comparten entre las transformadas de Park y de Clark.

#### 2.2.4.1. Matrices de transformación con $k = 1$

En el caso de que  $k_d = k_q = k_0 = 1$ , se tiene una relación de vueltas uno a uno, lo que provoca que las variables transformadas sean  $\frac{3}{2}$  veces más grandes de las amplitudes de las corrientes y los voltajes. Esta transformada es:

- Invariante en términos de impedancia.
- Invariante en términos de inductancia.
- No invariante en términos de potencia, ya que:

$$P_{dq0} = \frac{3}{2}P_{abc}$$

#### 2.2.4.2. Matrices de transformación con $k = \sqrt{\frac{2}{3}}$

En el caso de que  $k_d = k_q = k_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , la máquina equivalente bifásico debe de tener  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  más vueltas para así proveer de la misma FMM. Las variables transformadas también son  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  veces más grandes que las amplitudes de las corrientes y los voltajes. Sin embargo esta transformada es:

- Invariante en términos de impedancia.
- Invariante en términos de inductancia.
- Invariante en términos de potencia.

#### 2.2.4.3. Matrices de transformación con $k = \frac{2}{3}$

En el caso de que  $k_d = k_q = k_0 = \frac{2}{3}$ , la máquina equivalente debe de tener  $\frac{3}{2}$  veces más número de vueltas de espiras, para así producir la misma cantidad de FMM. Sin embargo, las variables transformadas tienen la misma amplitud que las ondas voltaje y de corriente. Esta transformada es:

- Invariante en términos de impedancia.
- Invariante en términos de inductancia.
- No invariante en términos de potencia, ya que:

$$P_{dq0} = \frac{2}{3}P_{abc}$$

En este apartado se realizó el análisis de las constantes empleadas con más frecuencia en la literatura de máquinas eléctricas. Este enfoque clásico, permite hacer este tipo de manipulaciones sobre el grupo de transformaciones, planteándolo desde la perspectiva de cualquier entidad física significativa. Sin embargo, cabe destacar que este enfoque requiere un grado mayor de experiencia, ya que las consideraciones iniciales determinan en gran manera el resultado final, que en este caso es la matriz de transformación.

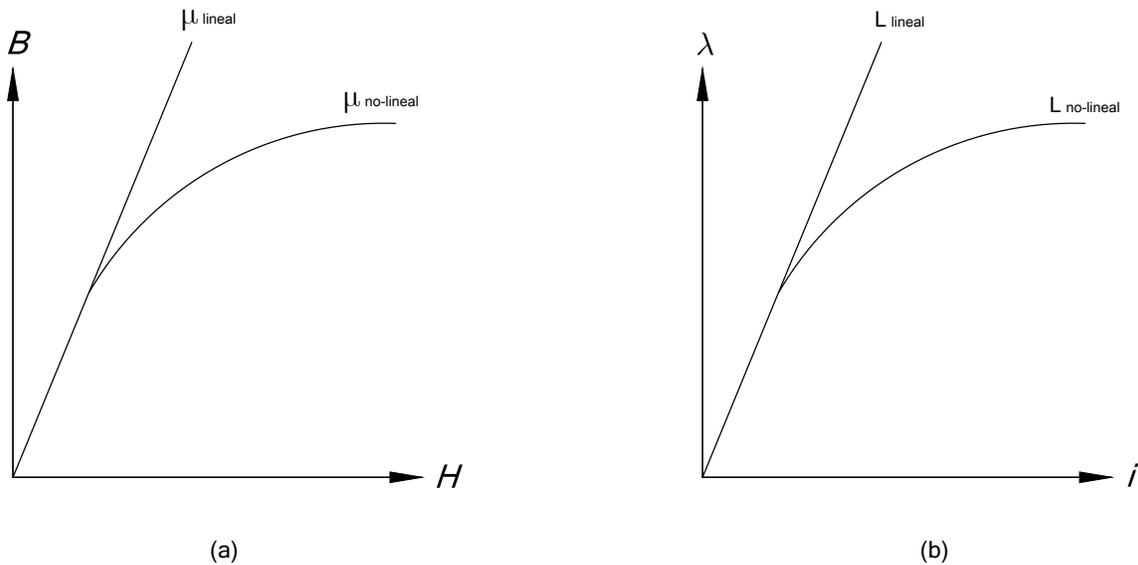


## Capítulo 3

# Modelo de la máquina de inducción simétrica

Existen muchas formas y métodos para obtener a través de modelos matemáticos el comportamiento dinámico de un sistema, donde algunos de éstos pueden ser más detallados o adecuados que otros, todo esto dependiendo de las necesidades de análisis que se tengan. Como ya se había expresado, siendo la máquina de inducción el tema de estudio e interés, éste es un sistema electromecánico no lineal con coeficientes variantes en el tiempo. Atendiendo lo de la parte no lineal, concretamente el fenómeno de saturación, éste se puede representar de dos formas diferentes con variables de distinta naturaleza, como se muestra en la figura 3.1. En la figura 3.1a se tiene un plano  $B-H$  donde  $B$  es la inducción magnética también llamada densidad de flujo magnético y  $H$  es la intensidad magnética también conocida como intensidad de campo magnético, la característica no lineal está dada por la permeancia  $\mu$  del material. Esta curva de magnetización en el plano  $B-H$  se asocia de manera directa con la parte magnética de la máquina, por lo que dada la naturaleza de las variables en que ésta se encuentra caracterizada, se puede decir que esta curva se refiere propiamente a la característica magnética del núcleo por el cual el flujo magnético viaja. Por el otro lado la figura 3.1b se asocia directamente con la parte eléctrica del sistema. El plano  $\lambda-i$  donde  $\lambda$  se refiere a los enlaces de flujo de magnetización e  $i$  es la corriente de magnetización, la característica no lineal se encuentra dada por la inductancia  $L$  de magnetización. Dicho lo anterior se puede decir

que esta curva se refiere netamente a la característica no lineal de las inductancias, lo que implicaría el efecto de saturación en la inductancia de magnetización de la máquina.



**Figura 3.1:** Curvas de magnetización

Lo dicho anteriormente puede llevar a la idea errada de que la parte magnética y la parte eléctrica son dos sistemas ajenos uno del otro, cuanto en realidad éstos se encuentran ligados de manera íntima e inseparable. De hecho un sistema electromecánico, está conformado por un sistema eléctrico, un sistema mecánico y un medio donde estos dos sistemas puedan interactuar. Esta interacción tiene lugar en los campos magnéticos y electrostáticos que son comunes a ambos sistemas, esto hace que la energía se transfiera de uno al otro como resultado de esta interacción, donde ambos campos de acoplamiento pueden existir de manera simultánea.

Sin embargo es posible obtener modelos de la máquina de inducción partiendo, ya sea de las variables magnéticas o de las variables eléctricas, lo que llamaremos enfoque de los circuitos magnéticos y el enfoque de los circuitos eléctricos, esto es posible debido a que existe una dualidad como lo menciona Cherry [Cherry, 1949]. Entre algunos de los trabajos que prefieren partir de las variables magnéticas, encontramos a Say [Say, 1948] cuya intención era el diseño y construcción de las máquinas, a Slemon [Slemon, 1953] quien utiliza este enfoque primordialmente para el estudio de los fenómenos no lineales

propios de los materiales magnéticos de las máquinas de corriente alterna, como lo son la saturación y la histéresis. Una de las ventajas de utilizar el enfoque de los circuitos magnéticos es que resulta transparente incluir las componentes no lineales a las inductancias, esto debido a que se trabaja desde cero en la formulación de la distribución del devanado y las características geométricas del núcleo en que éstos se arrollan. Posteriormente el trabajo de Slemon evolucionó [Slemon, 1990], a modelos que tienden hacia la consideración de los parámetros en forma distribuida, aunque el número de circuitos a considerar no es cercano a los que se emplearían en el método de elemento finito u otros métodos de solución.

Considerando que se busca modelar el comportamiento dinámico de un sistema, resulta natural el que se quiera implementar una teoría diseñada especialmente para el análisis dinámico. En la mecánica clásica encontramos una de las teorías que se adecúa a estos requisitos, siendo esta la mecánica lagrangiana. Esta teoría es equivalente a la formulación newtoniana y en el campo de los circuitos eléctricos es completamente equivalente a las leyes de Kirchhoff, sin embargo la mecánica lagrangiana se encuentra dotada de un mayor formalismo matemático y las consideraciones bajo las cuales se plantea el modelado de algún sistema son netamente energéticas [Taylor, 2005]. Se podría empezar el modelado a partir de la ecuación dinámica de Euler-Lagrange con la función de disipación de Rayleigh.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

Donde:

$\mathcal{L}$  = Es el Lagrangiano el cual se encuentra definido como la diferencia entre la energía potencial y la energía cinética. Dada la naturaleza del sistema, la energía potencial vendría siendo la energía magnética almacenada en los elementos.

$q_i$  = Son las  $i$ -ésimas coordenadas generalizadas del sistema.

$\dot{q}_i$  = Son las  $i$ -ésimas derivadas ordinarias de las coordenadas generalizadas del sistema.

$\mathcal{F}$  = Función de disipación de Rayleigh.

$Q_i$  =  $i$ -ésimas fuerzas generalizadas provenientes de una fuente externa.

Sin embargo de acuerdo a [Seely, 1962], este método requiere un mayor número de manipulaciones matemáticas y existe cierto grado de pérdida del fenómeno físico que subyace dentro del sistema, a pesar de eso esto último se puede arreglar mediante ciertas consideraciones en las fuerzas generalizadas.

Aunque el enfoque de Lagrange resulta ser bastante atractivo para el modelado de la máquina de inducción, es más sencillo construir una teoría física a partir del fenómeno físico que ocurre dentro de la máquina y establecer un conjunto de ecuaciones en función de los voltajes y el par, en otras palabras establecer desde el punto de vista de los circuitos eléctricos el modelo del sistema, esto quiere decir que en nuestro caso la concepción del modelo deja de partir de los circuitos magnéticos, esto no significa que este último deje de ser válido, pero resulta mucho más sencillo proponer el modelo desde el punto de vista de los circuitos eléctricos.

El propósito de este capítulo es describir en términos matemáticos los principios físicos de la máquina de inducción, partiendo desde el punto de vista eléctrico del sistema. Esto se hará en primera instancia, mediante un modelo formulado a partir de las variables de fase de la máquina, lo que se llama modelo en  $abc$ , en este punto se obtiene un sistema de ecuaciones diferencio-algebraico con coeficientes variantes en el tiempo. Luego se presenta la transformación del modelo en  $abc$  al modelo en  $dq0$  que permite manipular las componentes variantes en el tiempo siguiendo la metodología de [Krause et al., 2002] y [O'Kelly and Simmons, 1968] usando la matriz de Park y la matriz ortonormal de Park obtenida en el capítulo anterior. Por último se presenta a manera de ejemplo el modelo de la máquina de inducción mediante la utilización de la teoría generalizada de máquinas propuesta por G. Kron.

### 3.1. Modelo en $abc$

En esta sección se usan técnicas clásicas para el establecimiento de las ecuaciones de voltaje y de par en variables de máquina para la máquina de inducción simétrica. Se establece el conjunto de ecuaciones, el cual dada la naturaleza del fenómeno físico que se estudia, plantea un sistema de ecuaciones diferencio-algebraico (EDA) con coeficientes variantes en el tiempo, podemos definir en su forma más sencilla a las EDA's como un

sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's) con restricciones algebraicas en las variables. Se hablará un poco más de este tema en el siguiente capítulo.

Cualquier máquina, excepto aquellas con conmutador, consiste en un conjunto de devanados para los cuales se pueden escribir sus ecuaciones de voltaje en términos de resistencias y de inductancias. Dado que el tipo de modelado que se emplea en este trabajo, es un modelo concebido a partir de los circuitos eléctricos, solo se definirán las inductancias en base a las empleadas por Krause en [Krause et al., 2002], es decir no se expondrá de manera explícita las consideraciones geométricas y magnéticas para llegar a las expresiones de inductancia.

### 3.1.1. Ecuaciones de voltaje en variables de máquina

El arreglo de los devanados para una máquina de inducción simétrica de dos polos, trifásica, con conexión estrella se muestra en la figura 3.2.

De acuerdo a Krause [Krause et al., 2002] los devanados del estator son idénticos, distribuidos de manera sinusoidal y desplazados  $120^\circ$  eléctricos, con  $N_s$  como número de vueltas equivalente y resistencia  $r_s$ . De acuerdo a los propósitos establecidos, los devanados del rotor también serán idénticos, distribuidos de una manera sinusoidal y desplazados  $120^\circ$  eléctricos, con un número equivalente de vueltas de  $N_r$  y resistencia  $r_r$ . En la figura 3.2 es importante notar la dirección de giro de los devanados y que los ejes magnéticos de los devanados del estator  $as$ ,  $bs$  y  $cs$  coinciden con los devanados  $F_a$ ,  $F_b$  y  $F_c$  que se propusieron en la figura 2.7 cuando se descompuso a partir de la forma planar de los devanados trifásicos en los ejes  $\alpha$  y  $\beta$ .

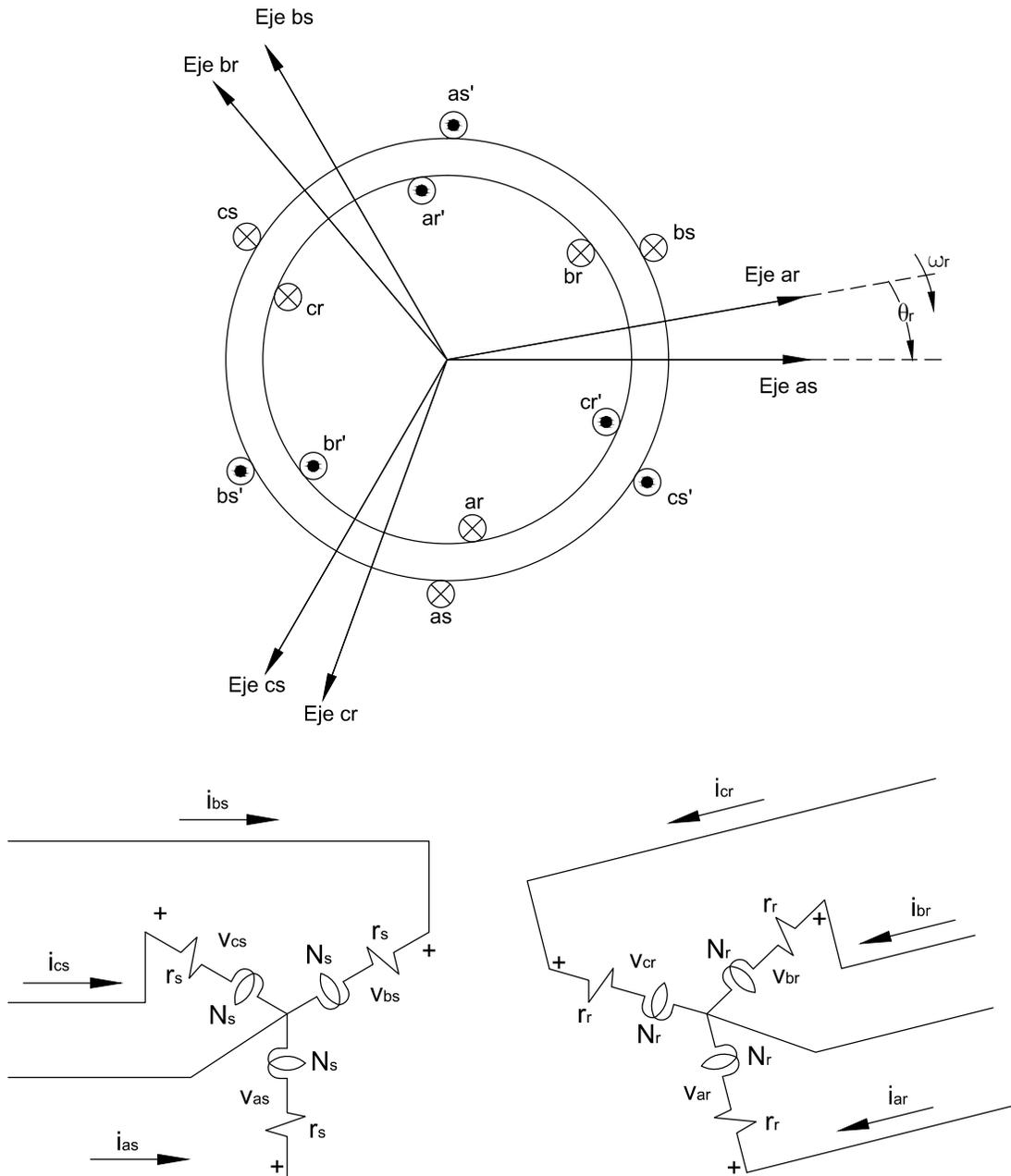
Se parte de la suposición de que la máquina de inducción es un circuito magnético lineal, es decir, la permeabilidad del núcleo se considera infinita, lo que implica que la saturación y la histéresis son despreciables.

Por lo tanto la ecuación matricial de voltaje en las variables de máquina se encuentra dada por:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda} \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{L}\mathbf{i} \quad (3.2)$$

Es conveniente reescribir (3.1) haciendo énfasis en que ésta está conformada por los parámetros de  $abc$  asociados con los circuitos del estator y rotor, para esto se agrega el subíndice  $s$  y  $r$  respectivamente.



**Figura 3.2:** Máquina de inducción simétrica de dos polos, trifásica con conexión estrella

$$\mathbf{v}_{abcs} = \mathbf{r}_s \mathbf{i}_{abcs} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}_{abcs} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{v}_{abcr} = \mathbf{r}_r \mathbf{i}_{abcr} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}_{abcr} \quad (3.4)$$

Donde:

$\mathbf{v} = [v_{as} \ v_{bs} \ v_{cs} \ 0 \ 0 \ 0]^T$  es el vector de voltajes de fase del estator y del rotor, estos últimos son cero debido a que este modelo considera una máquina de inducción jaula de ardilla.

$\mathbf{i} = [i_{as} \ i_{bs} \ i_{cs} \ i_{ar} \ i_{br} \ i_{cr}]^T$  es el vector de corrientes del estator y rotor.

$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_{as} \ \lambda_{bs} \ \lambda_{cs} \ \lambda_{ar} \ \lambda_{br} \ \lambda_{cr}]^T$  es el vector de enlaces de flujo del estator y rotor, los cuales se relacionan con el vector de corrientes de acuerdo a (3.2). Esta expresión es de hecho la restricción algebraica de nuestro sistema la cual debe ser solucionada de manera simultánea al sistema de ecuaciones diferenciales, ésta puede ser resuelta tanto para la corriente como para los enlaces de flujo dependiendo de las variables de estado que se prefieran cuando se postule el modelo del sistema.

Las matrices  $\mathbf{r}_s$  y  $\mathbf{r}_r$  de (3.3) y (3.4), son matrices diagonales de la forma:

$$\mathbf{r}_s = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{r}_r = \begin{bmatrix} r_r & 0 & 0 \\ 0 & r_r & 0 \\ 0 & 0 & r_r \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Esto nos permite escribir la matriz de resistencias  $\mathbf{R}$  de (3.1) de forma compacta.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{r}_r \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La expresión (3.2) también se puede escribir en función de los parámetros tanto del estator como del rotor de la siguiente manera, esto debido a que se considera un sistema magnético lineal, sin embargo cabe hacer mención que a pesar de esta simplificación

el sistema de ecuaciones diferenciales que representa la dinámica de la máquina, sigue siendo no lineal con coeficientes variantes en el tiempo.

$$\begin{bmatrix} \lambda_{abcs} \\ \lambda_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ (\mathbf{L}_{sr})^T & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abcs} \\ \mathbf{i}_{abcr} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Donde la matriz  $\mathbf{L}$  de (3.2) está conformada por las submatrices  $\mathbf{L}_s$ ,  $\mathbf{L}_r$  y  $\mathbf{L}_{sr}$ . La expresión matricial (3.8) indica que existe un acoplamiento magnético entre los devanados del estator y del rotor, lo que provoca que existan dos tipos distintos de inductancias. En un sistema magnético lineal, la inductancia propia de un devanado es la razón que existe entre el flujo enlazado por un devanado y la corriente que circula en el mismo, considerando a la corriente de cada uno de los otros devanados cero. La inductancia mutua, es la razón que hay entre el flujo enlazado por un devanado debido a la corriente que fluye en un segundo devanado, con todas corrientes de los otros devanados igualadas a cero, incluyendo la del devanado para el cual se está determinando el enlace de flujo. De las definiciones anteriores se tiene que  $\mathbf{L}_s$  es la matriz de inductancias propias del estator,  $\mathbf{L}_r$  es la matriz de inductancias propias del rotor y  $\mathbf{L}_{sr}$  es la matriz de inductancias mutuas entre los devanados del estator y del rotor. Éstas se definen de la siguiente manera [Krause et al., 2002]:

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} L_{lr} + L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & L_{lr} + L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & L_{lr} + L_{mr} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{L}_{sr} = L_{sr} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \theta_r & \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \theta_r \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

La matriz de inductancias mutuas entre rotor y estator está dada por  $(\mathbf{L}_{sr})^T$  como se indicó en (3.8).

Los elementos que conforman las submatrices de la matriz de inductancias  $\mathbf{L}$  son entonces.

$L_{ls}$  = Inductancia de dispersión del devanado de estator.

$L_{lr}$  = Inductancia de dispersión del devanado de rotor.

$L_{ms}$  = Inductancia de magnetización del devanado de estator.

$L_{mr}$  = Inductancia de magnetización del devanado de rotor.

$L_{sr}$  = Inductancia mutua entre el devanado de estator y el devanado de rotor.

Se entiende por inductancia de dispersión aquella que es causada por el flujo magnético de dispersión, es decir existen flujos magnéticos que no viajan por el material magnético, sino que se dispersan por el medio que rodea al material. Y se entiende por inductancia de magnetización aquella que es causada por el flujo de magnetización el cual viaja por el material magnético, es decir viaja solamente por el núcleo. Recuérdese una vez más que se ha hecho la consideración de que el material magnético tiene un comportamiento lineal. Bajo esta premisa muchos autores consideran a la inductancia de dispersión nula, sin embargo de acuerdo a Krause esta inductancia tiene un valor aproximado del 5% al 10% del valor máximo de la inductancia propia.

Para explicar el por qué algunas de las inductancias definidas anteriormente son constantes y otras son variantes respecto a la posición  $\theta_r$  es necesario recordar de la definición de inductancia, que el valor está determinado exclusivamente por las características geométricas de la bobina y por la permeabilidad magnética del espacio donde se encuentra. Esto se expresa de la siguiente forma:

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l} = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \quad (3.12)$$

Donde:

$\mu$  = Permeabilidad absoluta del espacio donde se encuentra (el producto entre la permeabilidad del aire  $\mu_0$  y la permeabilidad relativa del material  $\mu_r$ ). Se entiende por permeabilidad a la capacidad de una sustancia o medio para atraer y hacer a través de ella campos magnéticos.

$N$  = Número de vueltas de la bobina.

$A$  = Área de la sección transversal de la bobina.

$l$  = Longitud del material magnético y entrehierro que recorre el flujo magnético.

$\mathcal{R}$  = Reluctancia, propiedad de los materiales de oponerse al paso del flujo magnético.

Tanto el devanado de estator, como el devanado del rotor, en este caso son devanados trifásicos, esto indica que existe un acoplamiento magnético entre las bobinas del estator y existe otro acoplamiento magnético entre las bobinas del rotor. En (3.9) los elementos de la diagonal corresponden a las inductancias propias de cada bobina del estator y los elementos fuera de ésta corresponden a las inductancias mutuas que se tienen entre las bobinas del estator. De igual manera para el devanado del rotor.

En lo que respecta al acoplamiento magnético que existe entre los devanados del estator y del rotor y viceversa, en (3.11) se tiene una matriz que depende de la posición angular  $\theta_r$ . Si se analiza desde la referencia del entrehierro, y se deja correr el tiempo se puede observar que los devanados del rotor estarán girando, a diferencia de los devanados del estator, los cuales estarán estáticos. Si se consideran diversos instantes de tiempo se puede explicar la dependencia angular. Partiendo de la definición de inductancia (3.12) que está en función de la reluctancia  $\mathcal{R}$ . Consideremos que en  $t_0$ , los devanados del estator coinciden con los devanados del rotor es decir la bobina  $as$  está alineada con la bobina  $ar$  lo que implica que se tiene la reluctancia mínima. En  $t_1$  el rotor gira  $45^\circ$ , la longitud relativa que tiene que recorrer el flujo magnético es mayor con respecto a la que recorrió en  $t_0$ , esto significa que existe una mayor reluctancia entre la bobina  $ar$  y la bobina  $as$ . Dicho lo anterior, se presentará la mayor distancia es decir la máxima reluctancia cuando la bobina  $ar$  se encuentre a  $90^\circ$  eléctricos de la bobina  $as$ .

Cuando se expresan las ecuaciones de voltaje en forma de variables de máquina, resulta conveniente referenciar las variables del rotor a los devanados del estator, esto se logra mediante la apropiada relación de vueltas:

$$\begin{aligned}\mathbf{i}'_{abcr} &= \frac{N_r}{N_s} \mathbf{i}_{abcr} \\ \mathbf{v}'_{abcr} &= \frac{N_s}{N_r} \mathbf{v}_{abcr} \\ \lambda'_{abcr} &= \frac{N_s}{N_r} \lambda_{abcr}\end{aligned}$$

Las inductancias propias y mutuas están asociadas de manera constructiva o geométrica con la misma trayectoria de flujo magnético, por lo tanto  $L_{ms}$ ,  $L_{mr}$  y  $L_{sr}$  se encuentran relacionadas, en particular.

$$L_{ms} = \frac{N_s}{N_r} L_{sr}$$

En consecuencia se definirá

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'_{sr} &= \frac{N_s}{N_r} \mathbf{L}_{sr} \\ &= L_{ms} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \theta_r & \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \theta_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$L_{mr}$  puede ser expresada como:

$$L_{mr} = \left( \frac{N_r}{N_s} \right)^2 L_{ms}$$

referenciando la matriz de inductancias del rotor

$$\mathbf{L}'_r = \left( \frac{N_s}{N_r} \right)^2 \mathbf{L}_r$$

entonces de (3.10) se obtiene

$$\mathbf{L}'_r = \begin{bmatrix} L'_{lr} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L'_{lr} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L'_{lr} + L_{ms} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

donde

$$L'_{lr} = \left( \frac{N_s}{N_r} \right)^2 L_{lr}$$

Los enlaces de flujo pueden ahora ser expresados como:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{abcs} \\ \boldsymbol{\lambda}'_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}'_{sr} \\ (\mathbf{L}'_{sr})^T & \mathbf{L}'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abcs} \\ \mathbf{i}'_{abcr} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Las ecuaciones de voltaje expresadas en términos de las variables de máquina reflejadas en los devanados del estator pueden ser reescritas de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{abc s} \\ \mathbf{v}'_{abc r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_s + \frac{d}{dt} \mathbf{L}_s & \frac{d}{dt} \mathbf{L}'_{sr} \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{L}'_{sr})^T & \mathbf{r}'_r + \frac{d}{dt} \mathbf{L}'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abc s} \\ \mathbf{i}'_{abc r} \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{r}'_r = \left( \frac{N_s}{N_r} \right)^2 \mathbf{r}_r$$

La expresión de par eléctrico [Krause et al., 2002] en función de la matriz de inductancias mutua y corrientes está dada por:

$$T_e = \left( \frac{P}{2} \right) (\mathbf{i}_{abc s})^T \frac{\partial}{\partial \theta_r} [\mathbf{L}'_{sr}] \mathbf{i}'_{abc r} \quad (3.16)$$

siendo entonces la derivada parcial de (3.13) con respecto a  $\theta_r$

$$\frac{\partial [\mathbf{L}'_{sr}]}{\partial \theta_r} = -L_m \begin{bmatrix} \text{sen } \theta_r & \text{sen} \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) & \text{sen} \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \text{sen} \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & \text{sen } \theta_r & \text{sen} \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \text{sen} \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) & \text{sen} \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & \text{sen } \theta_r \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

El par y la velocidad del rotor están relacionados por la ecuación de oscilación:

$$T_e = J \left( \frac{2}{P} \right) \frac{d\omega_r}{dt} + T_L \quad (3.18)$$

Donde:

$P$  = Número de polos.

$J$  = Coeficiente de inercia del rotor.

$\omega_r$  = Velocidad angular del rotor (velocidad angular eléctrica).

$T_L$  = Par de carga.

### 3.1.2. Modelo en enlaces de flujo ( $\lambda$ ) para la simulación de la máquina de inducción en *abc*

Despejando para  $\lambda$  de la ecuación matricial (3.1) se tiene:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \mathbf{v} - \mathbf{R}\mathbf{i} \quad (3.19)$$

En forma expandida se tiene el conjunto de seis ecuaciones diferenciales para el modelo eléctrico:

$$\frac{d\lambda_{as}}{dt} = v_{as} - r_s i_{as} \quad (3.20)$$

$$\frac{d\lambda_{bs}}{dt} = v_{bs} - r_s i_{bs} \quad (3.21)$$

$$\frac{d\lambda_{cs}}{dt} = v_{bs} - r_s i_{bs} \quad (3.22)$$

$$\frac{d\lambda'_{ar}}{dt} = v'_{ar} - r'_r i'_{as} \quad (3.23)$$

$$\frac{d\lambda'_{br}}{dt} = v'_{br} - r'_r i'_{bs} \quad (3.24)$$

$$\frac{d\lambda'_{cr}}{dt} = v'_{cr} - r'_r i'_{cs} \quad (3.25)$$

Donde se define a los voltajes de fase de la siguiente manera:

$$v_{as} = \sqrt{\frac{2}{3}} V_{LL} \cos(\omega_b t) \quad (3.26)$$

$$v_{bs} = \sqrt{\frac{2}{3}} V_{LL} \cos\left(\omega_b t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.27)$$

$$v_{cs} = \sqrt{\frac{2}{3}} V_{LL} \cos\left(\omega_b t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.28)$$

$$v'_{ar} = 0 \quad (3.29)$$

$$v'_{br} = 0 \quad (3.30)$$

$$v'_{cr} = 0 \quad (3.31)$$

Donde:

$\omega_b$  = Velocidad angular base dada por  $2\pi f$  y  $f$  es la frecuencia de alimentación.

Despejando para las corrientes de (3.15) en forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abcs} \\ \mathbf{i}'_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}'_{sr} \\ (\mathbf{L}'_{sr})^T & \mathbf{L}'_r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{abcs} \\ \boldsymbol{\lambda}'_{abcr} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

De hecho (3.32) es la restricción algebraica de el sistema de EDA, el cual debe ser resuelto de manera simultánea a las ecuaciones diferenciales de los enlaces de flujo (3.20)-(3.25).

El par electromagnético  $T_e$  se calcula sustituyendo (3.17) en (3.16), la cual también forma parte de las restricciones algebraicas del modelo.

El par y la velocidad del rotor están relacionadas como se muestra en (3.18) la cual representa el modelo mecánico del sistema, sin embargo esta expresión tiene mezcladas variables de distinta naturaleza, lo que provoca que falte un factor de escalamiento. La velocidad angular en (3.18) se refiere a velocidad angular eléctrica, esto se puede subsanar mediante las siguientes relaciones.

$$\theta_r = \frac{P}{2}\theta_{rm} \quad (3.33)$$

Donde:

$\theta_r$  = Posición angular eléctrica del rotor.

$\theta_{rm}$  = Posición angular mecánica del rotor.

Recordando que la velocidad angular es la primer derivada de la posición angular  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ , se tiene entonces que:

$$\omega_r = \frac{P}{2}\omega_{rm} \quad \text{y} \quad \omega_{rm} = \frac{2}{P}\omega_r$$

$$T_e = J \left( \frac{P}{2} \right) \left( \frac{2}{P} \right) \frac{d\omega_{rm}}{dt} + T_L \quad (3.34)$$

Despejando para  $\omega_{rm}$

$$\frac{d\omega_{rm}}{dt} = \frac{T_e - T_L}{J} \quad (3.35)$$

Resulta complicado interpretar la velocidad angular como variable de salida, en la mayoría de los casos es más propio interpretar la posición angular, en caso de que esto último sea deseado, es necesario incorporar una ecuación más.

$$\frac{d\theta_{rm}}{dt} = \omega_{rm} \quad (3.36)$$

En el modelo de enlaces de flujo de la máquina de inducción las ecuaciones de estado son (3.20)-(3.25), (3.35) y (3.36).

### 3.2. Modelo en $dq0$

En el capítulo anterior se habló de manera exclusiva de las propiedad de las matrices de transformación y la interpretación de las mismas. Hasta esta sección se emplea la teoría de transformación de devanados para lidiar con el problema de los coeficientes variantes en el tiempo, esto mediante la aplicación de la transformada ortonormal de Park (2.23).

$$\mathbf{F}'_{dq0r} = \mathbf{K}_r \mathbf{F}'_{abcr} \quad (3.37)$$

Donde:

Los vectores  $\mathbf{F}'_{dq0r}$  y  $\mathbf{F}'_{abcr}$  representan cualquier vector de variables eléctricas del rotor referidas al estator, como por ejemplo: corrientes, voltajes, enlaces de flujo, etc. Siendo éstos de la forma.

$$(\mathbf{F}'_{dq0r})^T = [F'_{dr} \ F'_{qr} \ F'_{0r}] \quad (3.38)$$

$$(\mathbf{F}'_{abcr})^T = [F'_{ar} \ F'_{br} \ F'_{cr}] \quad (3.39)$$

La matriz de transformación de Park para las variables de los devanados del rotor sufre un pequeño cambio, esto para incluir el concepto de marco de referencia arbitrario. Se tiene entonces:

$$\mathbf{K}_r = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \beta & \cos \left( \beta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \beta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\sin \beta & -\sin \left( \beta - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left( \beta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

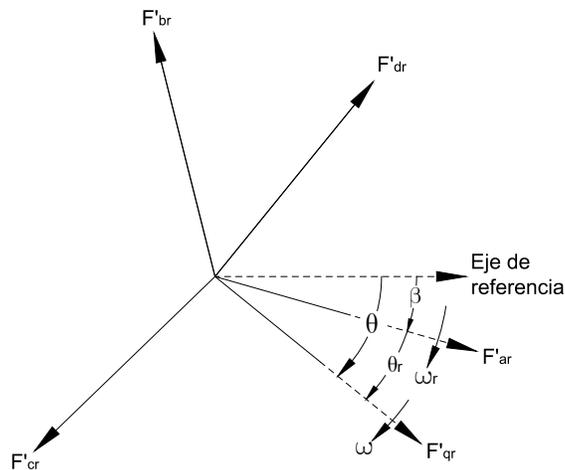
Donde:

$\beta = \theta - \theta_r$  en la figura 3.3, se aprecia que  $\theta$  es el ángulo entre el vector transformado y la referencia.  $\theta_r$  es el ángulo entre el vector original y el vector transformado, llamado también posición angular eléctrica.

La matriz inversa de la transformada de Park ortonormal es entonces su transpuesta de la forma:

$$(\mathbf{K}_r)^T = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\operatorname{sen} \beta & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \left( \beta - \frac{2\pi}{3} \right) & -\operatorname{sen} \left( \beta - \frac{2\pi}{3} \right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \left( \beta + \frac{2\pi}{3} \right) & -\operatorname{sen} \left( \beta + \frac{2\pi}{3} \right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

En el caso de optar por plantear circuitos estacionarios, las ecuaciones de transformación se pueden visualizar como las relaciones trigonométricas dadas entre las cantidades vectoriales del rotor las cuales están representadas en circuitos estacionarios como se muestra en la Figura 3.3 donde el ángulo  $\theta$  se mide a partir de la referencia elegida la cual se encuentra estática.



**Figura 3.3:** Relaciones de posición y velocidad angular en la transformación marcos de referencia

### 3.2.1. Transformación de las ecuaciones de $abc$ al marco de referencia arbitrario $dq0$

Se propondrá la transformación de las variables en  $abc$  a  $dq0$  a partir de la reescritura la ecuación matricial (3.1). Siendo entonces ésta expresada en variables de  $abc$ .

$$\mathbf{v}_{abc} = \mathbf{R}\mathbf{i}_{abc} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}_{abc} \quad (3.42)$$

En el caso de los circuitos magnéticos se acostumbra expresar los enlaces de flujo como el producto de la matriz de inductancias con el vector de corrientes, antes de realizar el cambio de variables. De cualquier forma la transformación es válida para los enlaces de flujo y una cantidad considerable de trabajo puede ser evitado si se transforman los enlaces de flujo de manera directa. Esto es especialmente verdadero para el análisis de máquinas de corriente alterna, donde la matriz de inductancias depende de la posición del rotor. Dicho lo anterior (3.42) se transforma de la siguiente manera: multiplicando por izquierda con la matriz de transformación  $\mathbf{K}$  ambos lados de la igualdad, se tiene.

$$\mathbf{K}\mathbf{v}_{abc} = \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{i}_{abc} + \mathbf{K}\frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}_{abc}$$

Dada la definición de (3.37), se puede sustituir solamente la expresión de voltaje. Para transformar  $\mathbf{i}_{abc}$  y  $\boldsymbol{\lambda}_{abc}$ , se introduce una matriz identidad de la forma  $\mathbf{I} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}$  a la izquierda de dichas variables a fin de no alterar la igualdad.

$$\mathbf{v}_{dq0} = \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{i}_{abc} + \mathbf{K}\frac{d}{dt}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda}_{abc})$$

Transformando las variables de corriente y de enlace de flujo se tiene

$$\mathbf{v}_{dq0} = \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{K}\frac{d}{dt}(\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{\lambda}_{dq0})$$

Derivando el producto de funciones que se tiene en la expresión anterior, se obtiene.

$$\mathbf{v}_{dq0} = \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{K}\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{K}^{-1})\boldsymbol{\lambda}_{dq0} + \mathbf{K}^{-1}\frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}_{dq0}\right) \quad (3.43)$$

Particularizando al devanado de estator el desarrollo de los productos y derivaciones de (3.43) extendiendo éste a los circuitos del rotor. Se obtiene entonces de manera expandida:

$$\mathbf{v}_{dq0s} = \mathbf{K}_s \mathbf{r}_s \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{i}_{dq0s} + \mathbf{K}_s \frac{d}{dt} (\mathbf{K}_s^{-1}) \boldsymbol{\lambda}_{dq0s} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}_{dq0s} \quad (3.44)$$

De manera análoga a la matriz de transformación de los devanados del rotor (3.40), la matriz de transformación del marco de referencia del estator  $\mathbf{K}_s$  es:

$$\mathbf{K}_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\text{sen } \theta & -\text{sen} \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) & -\text{sen} \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Donde su inversa es su transpuesta como ya se ha mencionado en repetidas ocasiones.

Se comienza obteniendo la transformación del vector de voltajes del estator, el cual se encuentra conformado por los elementos (3.26), (3.27) y (3.28). Como se estipuló anteriormente, el vector de voltajes de fase en  $dq0$  estará dado por  $\mathbf{K}_s \mathbf{v}_{abc}$  de la siguiente manera.

$$\mathbf{K}_s \mathbf{v}_{abc} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\text{sen } \theta & -\text{sen} \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) & -\text{sen} \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} V_{LL} \cos(\omega_b t) \\ \sqrt{\frac{2}{3}} V_{LL} \cos \left( \omega_b t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sqrt{\frac{2}{3}} V_{LL} \cos \left( \omega_b t + \frac{2\pi}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

El producto matricial arroja las siguientes relaciones.

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} V_{LL} \left( \cos(\omega_b t) \cos(\theta) + \cos \left( \omega_b t - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( \omega_b t + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} V_{LL} \left( \cos(\omega_b t) \text{sen}(\theta) + \cos \left( \omega_b t - \frac{2\pi}{3} \right) \text{sen} \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( \omega_b t + \frac{2\pi}{3} \right) \text{sen} \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} V_{LL} \left( \cos(\omega_b t) + \cos \left( \omega_b t - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( \omega_b t + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \end{bmatrix}$$

Simplificando mediante el uso de las relaciones trigonométricas de A.3, se obtiene:

$$\mathbf{v}_{dq0s} = \frac{2}{3} V_{LL} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cos(\omega_b t - \theta) \\ \frac{3}{2} \text{sen}(\omega_b t - \theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo términos el voltaje de estator transformado a  $dq0$  es:

$$\mathbf{v}_{dq0s} = \begin{bmatrix} V_{LL} \cos(\omega_b t - \theta) \\ V_{LL} \sin(\omega_b t - \theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Como se está modelando la máquina de inducción jaula de ardilla hablar de los voltajes de fase en el rotor carece de sentido.

Luego se transforman los elementos resistivos de estator, en este caso  $\mathbf{r}_s$  es igual a la expresada en (3.5). Todos los devanados de fase del estator de la máquina de inducción están diseñados para tener la misma resistencia. Si los elementos diagonales de la matriz  $\mathbf{r}_s$  son iguales, físicamente significa que las pérdidas reales son iguales independientemente de las transformaciones:

$$\mathbf{K}_s \mathbf{r}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} = \mathbf{r}_s \quad (3.48)$$

Esto significa que la matriz de transformación no afecta el valor de las resistencias, es decir estas se preservan intactas a pesar de la transformación. De igual manera para las resistencias de rotor se tiene:

$$\mathbf{K}_r \mathbf{r}_r (\mathbf{K}_r)^{-1} = \mathbf{r}_r \quad (3.49)$$

Desarrollando el término  $\mathbf{K}_s \frac{d}{dt} (\mathbf{K}_s^{-1}) \boldsymbol{\lambda}_{dq0s}$  se obtiene primero el término de la derivada de la matriz inversa, por lo que se tiene.

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{K}_s^{-1}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Recordando de las fórmulas de derivación

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \cos \theta &= -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d}{dt} \sin \theta &= \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

Donde  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ . Entonces se tiene que la derivada de la matriz inversa de transformación es.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{K}_s^{-1}) = \sqrt{\frac{2}{3}}\omega \begin{bmatrix} -\text{sen } \theta & -\text{cos } \theta & 0 \\ -\text{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\text{cos}(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 0 \\ -\text{sen}(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\text{cos}(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Premultiplicando por  $\mathbf{K}_s$  se tiene:

$$\mathbf{K}_s \frac{d}{dt}(\mathbf{K}_s^{-1}) = \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

De manera similar utilizando las matrices de transformación del rotor (3.40), se tendrá un resultado un tanto diferente a (3.51), esto debido a que (3.40) se encuentra definida en función del ángulo  $\beta = \theta - \theta_r$ .

$$\mathbf{K}_r \frac{d}{dt}(\mathbf{K}_r^{-1}) = (\omega - \omega_r) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

La ecuación (3.44) puede ser ahora expresada sin el operador diferencial que afecta la matriz inversa de transformación, similarmente la ecuación de voltajes de rotor referidos al estator en  $dq0$ , con lo que se tiene:

$$\mathbf{v}_{dq0s} = \mathbf{r}_s \mathbf{i}_{dq0s} + \omega \boldsymbol{\lambda}_{qds} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}_{dq0s} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{v}'_{dq0r} = \mathbf{r}'_r \mathbf{i}'_{dq0r} + (\omega - \omega_r) \boldsymbol{\lambda}'_{qdr} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}'_{dq0r} \quad (3.54)$$

Donde:

$$(\boldsymbol{\lambda}_{qds})^T = [-\lambda_{qs} \ \lambda_{ds} \ 0]$$

$$(\boldsymbol{\lambda}'_{qds})^T = [-\lambda'_{qr} \ \lambda'_{dr} \ 0]$$

Los términos del lado derecho de (3.53) y (3.54) que estén afectados por  $\omega$  son conocidos como *voltajes velocidad*, con la velocidad siendo la velocidad angular del marco de referencia arbitrario. Resulta evidente que en (3.53) los términos de *voltaje velocidad*

se hacen cero si  $\omega$  es cero, lo cual sucede cuando el marco de referencia es estacionario. Claramente las ecuaciones de voltaje para el circuito trifásico inductivo se vuelven la conocida razón de cambio de enlace de flujo por tiempo, si el marco de referencia está fijo donde el circuito existe físicamente. También debido a que (3.53) y (3.54) son válidas en general, éstas son válidas independientemente si el sistema es magnéticamente lineal o no y también son válidas a pesar de la forma de la matriz de inductancias si el sistema es magnéticamente lineal.

Para un sistema magnético lineal, los enlaces de flujo pueden ser expresados en forma matricial como se hizo en (3.2), expresándolos en el marco de referencia arbitrario se tiene entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\lambda_{abc} &= \mathbf{K}\mathbf{L}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{i}_{abc} \\ \lambda_{dq0} &= \mathbf{K}\mathbf{L}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{i}_{dq0}\end{aligned}\quad (3.55)$$

Extrapolando a la forma presentada en (3.15), teniendo el cuidado de colocar la matriz de transformación ya sea de estator o de rotor, según sea necesario:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{dq0s} \\ \lambda'_{dq0r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s\mathbf{L}_s(\mathbf{K}_s)^{-1} & \mathbf{K}_s\mathbf{L}'_{sr}(\mathbf{K}_r)^{-1} \\ \mathbf{K}_r(\mathbf{L}'_{sr})^T(\mathbf{K}_s)^{-1} & \mathbf{K}_r\mathbf{L}'_r(\mathbf{K}_r)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{dq0s} \\ \mathbf{i}'_{dq0r} \end{bmatrix}\quad (3.56)$$

Realizando las transformaciones de las submatrices de inductancias. Primero para las inductancias de estator  $\mathbf{L}_s$  de (3.9), se desarrolla  $\mathbf{K}_s\mathbf{L}_s$ , con lo que se obtiene:

$$\mathbf{K}_s\mathbf{L}_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} (L_{ls} + \frac{3}{2}L_{ms}) \cos \theta & (L_{ls} + \frac{3}{2}L_{ms}) \cos (\theta - \frac{2\pi}{3}) & (L_{ls} + \frac{3}{2}L_{ms}) \cos (\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -(L_{ls} + \frac{3}{2}L_{ms}) \sin \theta & -(L_{ls} + \frac{3}{2}L_{ms}) \sin (\theta - \frac{2\pi}{3}) & -(L_{ls} + \frac{3}{2}L_{ms}) \sin (\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}L_{ls} & \frac{1}{\sqrt{2}}L_{ls} & \frac{1}{\sqrt{2}}L_{ls} \end{bmatrix}\quad (3.57)$$

Esta expresión se puede reescribir como el producto de dos matrices.

$$= \begin{bmatrix} L_{ls} + \frac{3}{2}L_{ms} & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls} + \frac{3}{2}L_{ms} & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{bmatrix} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos (\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos (\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \theta & -\sin (\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin (\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_s}\quad (3.58)$$

Solamente hace falta multiplicar por derecha por  $(\mathbf{K}_s)^{-1}$ , lo que implica que la matriz de inductancias de estator en  $dq0$  es:

$$\mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} = \begin{bmatrix} L_{ls} + \frac{3}{2} L_{ms} & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls} + \frac{3}{2} L_{ms} & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Para las inductancias del rotor, se transforma (3.14). Debido a la similitud que existe entre las matrices  $\mathbf{L}_s$  y  $\mathbf{L}'_r$  se obtiene:

$$\mathbf{K}_r \mathbf{L}'_r (\mathbf{K}_r)^{-1} = \begin{bmatrix} L'_{lr} + \frac{3}{2} L_{ms} & 0 & 0 \\ 0 & L'_{lr} + \frac{3}{2} L_{ms} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{lr} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Para la matriz de inductancias mutuas (3.13), se tiene:  $\mathbf{K}_s \mathbf{L}'_{sr} (\mathbf{K}_r)^{-1} = \mathbf{K}_r (\mathbf{L}'_{sr})^T (\mathbf{K}_s)^{-1}$ . El producto  $\mathbf{K}_s \mathbf{L}'_{sr}$ .

$$\mathbf{K}_s \mathbf{L}'_{sr} = \sqrt{\frac{2}{3}} L_{ms} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cos(\theta - \theta_r) & \frac{3}{2} \cos(\theta - \theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \frac{3}{2} \cos(\theta - \theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ -\frac{3}{2} \sin(\theta - \theta_r) & -\frac{3}{2} \sin(\theta - \theta_r - \frac{2\pi}{3}) & -\frac{3}{2} \sin(\theta - \theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Multiplicando por derecha por  $(\mathbf{K}_r)^{-1}$ , recordemos que esta matriz se encuentra definida en función de  $\beta = \theta - \theta_r$ , por lo que es necesario adecuar la expresión anterior de forma que

$$= L_{ms} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cos(\beta) & \frac{3}{2} \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \frac{3}{2} \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\frac{3}{2} \sin(\beta) & -\frac{3}{2} \sin(\beta - \frac{2\pi}{3}) & -\frac{3}{2} \sin(\beta + \frac{2\pi}{3}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\beta + \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Debido a la ortogonalidad que existe entre los renglones, solamente se tendrán elementos distintos de cero en la diagonal. Usando las tablas trigonométricas A.3, se obtiene.

$$\mathbf{K}_s \mathbf{L}'_{sr} (\mathbf{K}_r)^{-1} = \mathbf{K}_r (\mathbf{L}'_{sr})^T (\mathbf{K}_s)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} L_{ms} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} L_{ms} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Como se puede observar de aplicar la transformación al sistema  $abc$ , variante en el tiempo (3.42), se obtienen (3.53) y (3.54) donde sus inductancias ya son invariantes en el tiempo.

La ecuación de par electromagnético en término de las variables del marco de referencia arbitrario puede ser obtenido si aplicamos las matrices de transformación a (3.16), por lo que se tiene:

$$T_e = \left(\frac{P}{2}\right) [(\mathbf{K}_s)^{-1} \mathbf{i}_{dq0s}]^T \frac{\partial}{\partial \theta_r} [\mathbf{L}'_{sr}] (\mathbf{K}_r)^{-1} \mathbf{i}'_{dq0r} \quad (3.64)$$

Donde  $\mathbf{L}'_{sr}$  es la matriz de inductancias mutuas definida en (3.13). Se desarrolla la ecuación anterior y se obtiene una expresión para el par electromagnético en función de las corrientes de  $dq0$ , el número de polos y la inductancia de magnetización del estator  $L_{ms}$ .

$$T_e = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{P}{2}\right) L_{ms} (i_{qs} i'_{dr} - i_{ds} i'_{qr}) \quad (3.65)$$

### 3.2.2. Modelo en enlaces de flujo ( $\lambda$ ) para la simulación de la máquina de inducción en $dq0$

Al igual que para el modelo en  $abc$ , se puede plantear el modelo en variables de enlace de flujo para luego simular el comportamiento dinámico del sistema. Despejando de (3.53) y (3.54) la derivada del enlace.

$$\frac{d}{dt} \lambda_{dq0s} = \mathbf{v}_{dq0s} - \mathbf{r}_s \mathbf{i}_{dq0s} - \omega \lambda_{qds} \quad (3.66)$$

$$\frac{d}{dt} \lambda'_{dq0r} = \mathbf{v}'_{dq0r} - \mathbf{r}'_r \mathbf{i}'_{dq0r} - (\omega - \omega_r) \lambda'_{qdr} \quad (3.67)$$

A menudo se escriben en forma expandida las ecuaciones anteriores, con lo que se tiene un conjunto de seis ecuaciones diferenciales.

$$\frac{d}{dt}\lambda_{ds} = v_{ds} - r_s i_{ds} + \omega \lambda_{qs} \quad (3.68)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_{qs} = v_{qs} - r_s i_{qs} - \omega \lambda_{ds} \quad (3.69)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_{0s} = v_{0s} - r_s i_{0s} \quad (3.70)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda'_{dr} = v'_{dr} - r'_r i'_{dr} + (\omega - \omega_r)\lambda'_{qr} \quad (3.71)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda'_{qr} = v'_{qr} - r'_r i'_{qr} - (\omega - \omega_r)\lambda'_{dr} \quad (3.72)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda'_{0r} = v'_{0r} - r'_r i'_{0r} \quad (3.73)$$

Donde:

$\omega$  = marco de referencia seleccionado;

$\omega_r$  = Velocidad angular eléctrica del rotor.

Tomando de (3.47) los voltajes de estator y rotor se tiene.

$$v_{ds} = V_{LL} \cos(\omega_b t - \theta) \quad (3.74)$$

$$v_{qs} = V_{LL} \text{sen}(\omega_b t - \theta) \quad (3.75)$$

$$v_{0s} = 0 \quad (3.76)$$

$$v_{dr} = 0 \quad (3.77)$$

$$v_{qr} = 0 \quad (3.78)$$

$$v_{0r} = 0 \quad (3.79)$$

$$(3.80)$$

Mediante la utilización de las variables  $\omega$ ,  $\beta$  y  $\theta$ , se puede seleccionar el marco de referencia que más convenga. Siendo tres marcos los más socorridos.

(1) Marco de referencia estacionario.

$$\beta = -\theta_r$$

$$\theta = 0$$

$$\omega = 0$$

(2) Marco de referencia del rotor

$$\beta = 0$$

$$\theta = \theta_r$$

$$\omega = \omega_r$$

(3) Marco de referencia síncrono

$$\beta = \omega_r t - \theta$$

$$\theta = \omega_b t$$

$$\omega = \omega_b$$

De igual forma que en el modelo en *abc* se tiene un sistema no lineal de EDO con restricciones algebraicas, sin embargo a través de la selección del marco de referencia estacionario, se logra eliminar los coeficientes de inductancias variantes en el tiempo, esto provoca que las ecuaciones sean más manejables, pero éstas siguen siendo no lineales.

Todavía es necesario resolver, las restricciones algebraicas impuestas por el vector de corriente. En forma matricial se tiene:

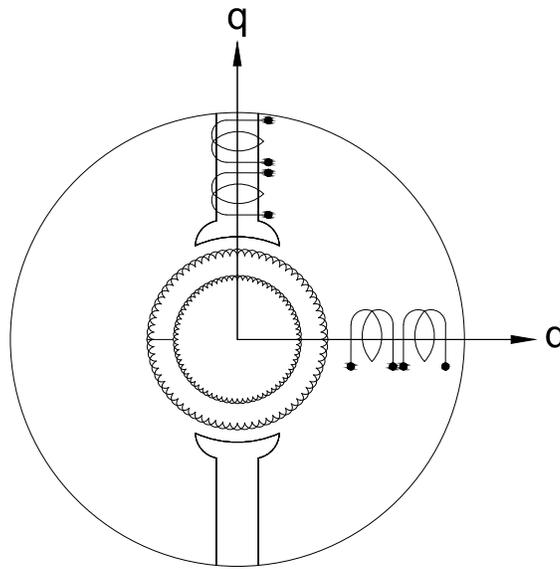
$$\mathbf{I}_{dq0} = \mathbf{L}_{dq0}^{-1} \boldsymbol{\lambda}_{dq0}$$

Siendo  $\mathbf{L}_{dq0}$  la matriz de inductancias conformada por las submatrices de inductancia de transformadas obtenidas en (3.59), (3.60) y (3.63).

El par electromagnético sigue estando dado por (3.65). La relación par velocidad se presenta de la misma manera que en el modelo en *abc* y de igual forma es necesario adecuarla para que contenga variables de la misma naturaleza, dicho lo anterior la derivada de la velocidad angular mecánica está dada por la misma expresión (3.35).

### 3.3. Modelado mediante la teoría generalizada de máquinas

La teoría generalizada, propuesta en un principio en [Kron, 1938] como se mencionó en la sección 1.2, es concebida con la misión, de facilitar y abarcar completamente el estudio de los distintos tipos de máquinas, usando una sola teoría unificadora. Para esto Kron, partió de los trabajos de [Doherty and Nickle, 1926], donde la máquina síncrona de polos salientes era el objeto focal de estudio. Kron formuló su teoría partiendo de esta idea, la de incluir en su modelo polos salientes en el estator, donde a éste lo llamó la máquina generalizada, la cuál se muestra en la figura 3.4 y ésta sirve para representar cualquier máquina, siempre y cuando se consideren ciertas adecuaciones propias de la naturaleza de cada una de ellas.



**Figura 3.4:** Máquina generalizada de Kron

La teoría generalizada de máquinas gira en torno a la ecuación general de las máquinas y la ecuación de par. Este enfoque permite plantear al conjunto de ecuaciones de voltaje de la máquina en variables  $abc$  en función de las corrientes, también permite formar de manera relativamente sencilla las matrices de coeficientes resistivos e inductivos, así como de igual manera permite incluir diversos casos concernientes a la geometría de los

devanados.

Una vez obtenidas las matrices de coeficientes, éstas se transformarán a variables  $dq0$ , sin embargo ciertas adecuaciones deben hacerse para obtener los coeficientes de la ahora transformada ecuación general de las máquinas. Es decir a partir de un diagrama esquemático en cual se encontrarán alojadas bobinas estacionarias y pseudoestacionarias de forma ortogonal es posible determinar las interacciones entre las variables de la máquina.

Originalmente la metodología desarrollada por Kron estaba orientada hacia el uso del análisis tensorial, tema que se encuentra más allá de los alcances de este trabajo sin embargo, la teoría generalizada se puede abordar mediante el álgebra matricial, como se propone en [O'Kelly and Simmons, 1968]. Partiendo de este trabajo se presentará a manera de ejemplo el modelo de la máquina de inducción.

### 3.3.1. Elementos de la teoría generalizada

A diferencia de las secciones anteriores, en este apartado se iniciará exponiendo la metodología de la teoría generalizada para un devanado en el estator y un devanado en el rotor donde las variables de la máquina se encuentran en  $abc$ , solamente se indicará la forma de agregar los elementos que se encuentran desplazados  $120^\circ$  eléctricos así como las consideraciones que se deben de hacer en caso de saliencia en cualquiera de los devanados, aunque no se expondrá a detalle las matrices concernientes. De igual forma que en los modelos presentados anteriormente, no se ahondará en la definición geométrica de las inductancias.

En el estudio de la teoría generalizada de máquinas eléctricas se realizan las siguientes consideraciones en forma general:

- a) La saturación magnética es ignorada. Se puede aplicar superposición en los campos magnéticos, las inductancias propias y mutuas de todos los devanados son independientes de la magnitud de corriente en el devanado. Es decir la máquina se estudia como un sistema lineal.
- b) La FMM en el entrehierro y los flujos son solo representados con la componente fundamental.

- c) Los efectos de ranurado se ignoran y los diámetros de los conductores son pequeños.
- d) La conmutación es ideal, el ancho de las escobillas y segmentos del conmutador son ignorables y el cambio de corriente es instantáneo.
- e) Se desprecian las pérdidas por histéresis y por corrientes parásitas.

Se comienza considerando dos devanados cualesquiera para el devanado del estator como para el del rotor. Los enlaces de flujo en una bobina es la suma de los enlaces propios y mutuos. Para el estator y el rotor se tiene:

$$\lambda_s = L_s i_s + M_{sr} i_r \quad (3.81)$$

$$\lambda_r = L_r i_r + M_{sr} i_s \quad (3.82)$$

Donde:

$L_s$  = es la inductancia propia de estator.

$L_r$  = es la inductancia propia de rotor.

$M_{sr}$  = es la inductancia mutua entre estator y rotor.

el voltaje instantáneo aplicado en las bobinas es:

$$v_s = R_s i_s + \frac{d}{dt} \lambda_s$$

$$v_r = R_r i_r + \frac{d}{dt} \lambda_r$$

Sustituyendo (3.81) y (3.82) en las expresiones anteriores de voltaje

$$v_s = R_s i_s + \frac{d}{dt} (L_s i_s + M_{sr} i_r)$$

$$v_r = R_r i_r + \frac{d}{dt} (L_r i_r + M_{sr} i_s)$$

Por generalidad asumiremos que tanto las inductancias propias y mutuas  $L_s$ ,  $L_r$  y  $M_{sr}$  son función de la posición angular del rotor  $\theta_r$ , es decir éstas pueden variar con respecto

a diferentes instantes de tiempo, se hace esta consideración debido a que esta formulación se adapta dependiendo del grado de saliencia que exista ya sea en el estator, en el rotor o en ambos. Entenderemos por saliencia a la variación de la distancia del rotor con el estator, dependiendo de la perspectiva. En las expresiones anteriores se tiene un producto de funciones al cual es necesario aplicar la regla de la cadena por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} v_s &= R_s i_s + L_s \frac{d}{dt} i_s + i_s \frac{dL_s}{d\theta_r} \frac{d\theta_r}{dt} + M_{sr} \frac{d}{dt} i_r + i_r \frac{dM_{sr}}{d\theta_r} \frac{d\theta_r}{dt} \\ v_r &= R_r i_r + L_r \frac{d}{dt} i_r + i_r \frac{dL_r}{d\theta_r} \frac{d\theta_r}{dt} + M_{sr} \frac{d}{dt} i_s + i_s \frac{dM_{sr}}{d\theta_r} \frac{d\theta_r}{dt} \end{aligned}$$

Recordemos de  $\omega_r = \frac{d\theta_r}{dt}$ , por lo que las expresiones pueden ser reescritas como:

$$\begin{aligned} v_s &= R_s i_s + L_s \frac{d}{dt} i_s + M_{sr} \frac{d}{dt} i_r + \omega_r i_s \frac{dL_s}{d\theta_r} + \omega_r i_r \frac{dM_{sr}}{d\theta_r} \\ v_r &= R_r i_r + L_r \frac{d}{dt} i_r + M_{sr} \frac{d}{dt} i_s + \omega_r i_r \frac{dL_s}{d\theta_r} + \omega_r i_s \frac{dM_{sr}}{d\theta_r} \end{aligned}$$

En forma matricial.

$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \left( \underbrace{\begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} + \underbrace{\begin{bmatrix} L_s & M_{sr} \\ M_{sr} & L_r \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \frac{d}{dt} + \omega_r \underbrace{\frac{d}{d\theta_r} \begin{bmatrix} L_s & M_{sr} \\ M_{sr} & L_r \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \right) \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Los términos correspondientes al voltaje inducido en (3.83) se pueden considerar de dos tipos distintos. Aquellos que son función de la variación en el tiempo de las corrientes son conocidos como *voltajes propios* y *mutuos*, mientras que aquellos que se encuentran en función de la variación de la posición angular de la inductancia, son conocidos como *voltajes rotacionales*. Reescribiendo en forma reducida la expresión anterior, se tiene la *ecuación general de las máquinas eléctricas*.

$$\mathbf{v} = \{\mathbf{R} + \mathbf{L} \frac{d}{dt} + \omega_r \mathbf{G}\} \mathbf{i} \quad (3.84)$$

La expresión para calcular el par electromagnético se define como:

$$T_e = \frac{P}{2} \mathbf{i}^T \mathbf{G} \mathbf{i} \quad (3.85)$$

El concepto de *voltajes rotacionales* y la expresión del par electromagnético (3.85) presentan ciertas similitudes, tanto con la expresión (3.16) como con el concepto de *voltajes velocidad*, que se expusieron en las subsecciones 3.1.1 y 3.2.1 respectivamente. Sin embargo lo expuesto en dichas apartados es un caso particular, y las pretensiones de este apartado son las de presentar algunas de las consideraciones que se toman en el estudio generalizado de las máquinas.

El significado físico de los *voltajes rotacionales*, puede ser explicado con mayor facilidad si recurrimos a la definición de inductancia dada en (3.12). Como se puede apreciar de (3.84), los términos que corresponden a los coeficientes rotacionales de la matriz  $\mathbf{G}$  son las razones de cambio de las inductancias con respecto a la posición angular del rotor, lo cual es consecuencia de los grados de saliencia que posea la máquina.

Se consideran 2 casos de saliencia.

- 1) Cero grados de saliencia: Rotor y estator cilíndricos, véase figura 3.2. Debido a que no existe una variación en el entrehierro, es decir la longitud del material magnético se mantiene sin cambios, esto hablando únicamente de las inductancias propias, por lo cual se considera a las inductancias como:

$$L_s = \text{constante}$$

$$L_r = \text{constante}$$

$$M_{sr} = M_{sr} \cos \theta_r$$

- 2) Un grado de saliencia: Rotor cilíndrico y saliencia en el estator, véase figura 3.4. En este caso si existe una variación en el entrehierro. Si se coloca un observador en la referencia del estator, éste no verá cambio en la longitud que recorre el flujo magnético debido a que el rotor es liso, independientemente de que éste esté girando, sin embargo si se traslada este observador a la referencia del rotor, éste si verá un cambio en la geometría de la trayectoria que tiene que recorrer el flujo magnético para cada instante de tiempo, debido a los polos salientes que se tienen en el estator.

$$L_r = L_{r1} + L_{r2} \cos 2\theta_r$$

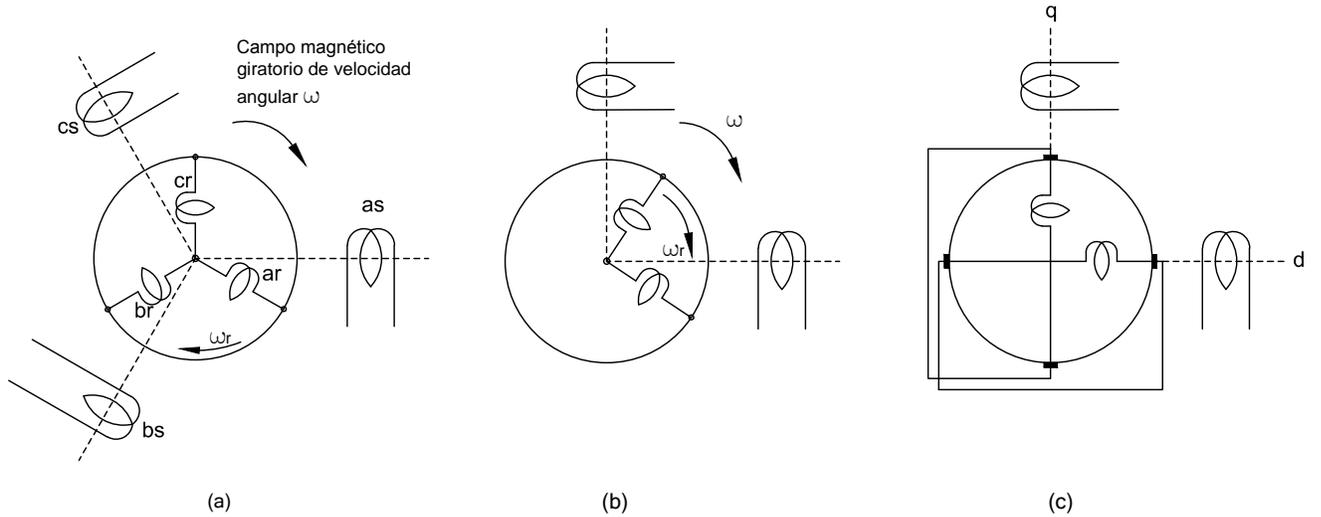
$$L_s = \text{constante}$$

$$M_{sr} = M_{sr} \cos \theta_r$$

Cabe hacer mención que los términos que conforman a  $L_r$  son la componente de directa en adición con la componente de la segunda armónica. En el caso de un sistema trifásico las inductancias propias de los devanados de rotor se escribirían como:  $L_{r1} + L_{r2} \cos 2\theta_r$ ,  $L_{r1} + L_{r2} \cos 2(\theta_r - \frac{2\pi}{3})$  y como  $L_{r1} + L_{r2} \cos 2(\theta_r + \frac{2\pi}{3})$ . La matriz de inductancias mutuas tendría una forma similar a la de (3.11). La deducción de las mismas se puede encontrar en [O'Kelly and Simmons, 1968] y en [Krause et al., 2002].

### 3.3.2. Obtención del modelo en corrientes ( $i$ ) de la máquina de inducción mediante la teoría generalizada

La transformación de la máquina de inducción se realiza en dos pasos. Primero las variables trifásicas de estator y rotor son convertidas en su equivalente de dos ejes. El segundo paso no requiere que se transformen los valores de las variables de estator, sin embargo las variables de rotor son transformadas de su marco de referencia en dos ejes al marco de referencia en dos ejes del estator. Esta secuencia de transformaciones se ilustra en la figura 3.5.



**Figura 3.5:** Transformación de la máquina de inducción trifásica a su equivalente máquina primitiva

EL proceso de transformación descrito anteriormente, es una forma de interpretar lo descrito en el capítulo 2, aquí se presenta en forma gráfica, siendo de nuestro interés para este apartado profundizar en el análisis de la máquina primitiva, la cual se muestra en la figura 3.5c. A partir de ésta se desarrollará el modelo en corrientes de la máquina de inducción mediante los lineamientos de la teoría generalizada.

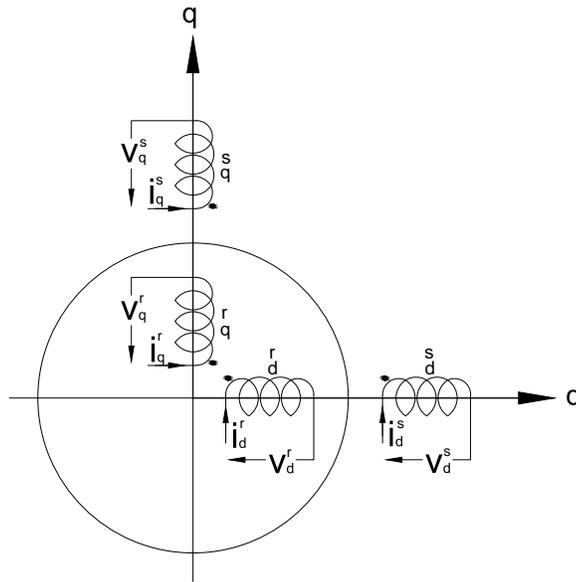
El modelo de la máquina primitiva, también conocida como la máquina primitiva de Kron, debe tener un desempeño equivalente al de la máquina original, esta metodología es válida únicamente para condiciones balanceadas. La máquina primitiva posee dos tipos de bobinas, bobinas estacionarias en el estator y bobinas pseudoestacionarias en el rotor. Las bobinas estacionarias se refieren a que éstas se encuentran fijas en el espacio, es decir no se encuentran girando con el campo magnético giratorio. Se define a las bobinas pseudoestacionarias como una bobina estacionaria a la cual se le induce un voltaje rotacional.

El modelo de la máquina primitiva en el caso de la máquina de inducción consiste en dos bobinas pseudoestacionarias en el rotor y dos bobinas estacionarias en el estator, donde cada una de ellas se encuentra alojada a lo largo tanto del eje  $d$  como del eje  $q$ , como se muestra en la figura 3.6.

En general el número de bobinas en cada eje es ilimitado, pero un excesivo número de devanados haría al análisis subsecuente laborioso. Cada bobina de la figura 3.6 es identificada por una notación de subíndices y superíndices, los subíndices se refieren al eje magnético en el cual está alojada la bobina, ya sea en el eje  $d$  o en el eje  $q$  y el superíndice indica si la bobina pertenece al estator o al rotor. Por ejemplo,  $^s_d$  indica que se trata de la bobina del estator alojada en el eje  $d$ .

Es entonces que se propone una metodología para construir las matrices  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{G}$  para la máquina primitiva de la figura 3.6. Antes de proceder es necesario usar una notación de subíndices y superíndices dobles para así identificar los devanados asociados con coeficiente en particular de las matrices  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{G}$ . Por ejemplo  $G_{dq}^{rs}$ :

- La primera columna  $^r_d$  indica donde se induce el voltaje.
- La segunda columna  $^s_q$  indica quien induce voltaje.



**Figura 3.6:** Diagrama esquemático de la máquina primitiva correspondiente a la máquina de inducción

Entonces  $G_{dq}^{rs}$  se leería como, el flujo la bobina de rotor en eje  $d$  debido al flujo de la bobina de estator en el eje  $q$ .

a) Formulación de la matriz de los coeficientes de inductancias  $\mathbf{L}$

Los coeficientes de las inductancias propias, son los autoinducidos en cada una de las bobinas y los coeficientes de las inductancias mutuas estarán presentes cuando un par de bobinas están situadas en el mismo eje magnético. En base al arreglo de bobinas que se tiene en la figura 3.6 se tiene.

Donde se induce ↓

	$s_d$	$r_d$	$s_q$	$r_q$	
$s_d$	$L_d^s$	$M_{dd}^{sr}$	0	0	← Quien induce
$r_d$	$M_{dd}^{rs}$	$L_d^r$	0	0	
$s_q$	0	0	$L_q^s$	$M_{qq}^{sr}$	
$r_q$	0	0	$M_{qq}^{rs}$	$L_q^r$	

$\mathbf{L} =$

(3.86)

La matriz contiene coeficientes de inductancias mutuas que a pesar de tener nomenclaturas en orden distinto son iguales.

$$M_{dd}^{sr} = M_{dd}^{rs}$$

$$M_{qq}^{sr} = M_{qq}^{rs}$$

En caso de tener una máquina con polos salientes, en general no se cumple que:

$$L_d^s \neq L_q^s, \quad L_d^r \neq L_q^r, \quad \text{y} \quad M_{dd}^{sr} \neq M_{qq}^{sr} \quad (3.87)$$

esto debido a que la geometría de los ejes donde se alojan las bobinas a lo largo de los ejes  $d$  y  $q$  es diferente. La matriz de coeficientes de inductancias (3.86), corresponde a una máquina con cero grados de saliencia, como lo requiere el modelo de la máquina de inducción.

b) Formulación de la matriz de coeficientes rotacionales  $\mathbf{G}$

Un coeficiente  $G$  está presente cuando un par de bobinas están localizadas en cuadratura y una de ellas es pseudoestacionaria, estos coeficientes se obtienen solo para las bobinas del rotor, lo que implica que las bobinas del rotor en este tipo de modelado son consideradas como pseudoestacionarias. Las bobinas que inducen pueden estar en el estator o en el rotor. Dicho lo anterior, la matriz  $\mathbf{G}$  resulta:

	Donde se induce ↓	$s$ $d$	$r$ $d$	$s$ $q$	$r$ $q$	← Quien induce
$\mathbf{G} =$		$s$ $d$	$r$ $d$	$s$ $q$	$r$ $q$	
		0	0	0	0	
		$r$ $d$	$r$ $d$	$G_{dq}^{rs}$	$G_{dq}^{rr}$	(3.88)
		$s$ $q$	$r$ $d$	0	0	
		$r$ $q$	$s$ $q$	$G_{qd}^{rs}$	$G_{qd}^{rr}$	
		0	0	0	0	

El significado de los coeficientes  $G$  de la expresión (3.88), están determinados por:

$$G_{rs} = -M_m \text{sen } \theta_r \quad (3.89)$$

Para aplicar la definición (3.89) se requiere considerar un desplazamiento angular ficticio de  $\pm \frac{\pi}{2}$  de las bobinas pseudoestacionarias, es decir se supondrá que una bobina pseudoestacionaria alojada en el eje  $d$  se trasladará al eje  $q$  y viceversa. Se recuerda que los coeficientes  $G$  existirán cuando un par de bobinas son ortogonales y una de ellas es pseudoestacionaria, el signo que tomará el desplazamiento angular ficticio dependerá de si el desplazamiento de la bobina pseudoestacionaria al alinearse se mueve del eje  $d$  al eje  $q$ , entonces éste tomará el valor de  $\frac{\pi}{2}$ , pero si el desplazamiento es del eje  $q$  al eje  $d$  el valor que tomará será de  $-\frac{\pi}{2}$ .

Dicho lo anterior el valor de  $M_m$  es el valor de la inductancia mutua cuando la bobina a la cual se le induce voltaje, se imagina alineada de manera colineal con el eje de la bobina que induce voltaje. Aplicando entonces la definición (3.89).

Coefficientes con bobinas en el estator como fuentes de flujo que inducen voltaje.

$$\begin{aligned} G_{dq}^{rs} &= -M_{qq}^{rs} \text{sen} \left( +\frac{\pi}{2} \right) = -M_{qq}^{rs} \\ G_{qd}^{rs} &= -M_{dd}^{rs} \text{sen} \left( -\frac{\pi}{2} \right) = M_{dd}^{rs} \end{aligned}$$

Coefficientes que incluyen dos bobinas pseudoestacionarias.

$$\begin{aligned} G_{dq}^{rr} &= -M_{qq}^{rr} \text{sen} \left( +\frac{\pi}{2} \right) = -M_{qq}^{rr} \\ G_{qd}^{rr} &= -M_{dd}^{rr} \text{sen} \left( -\frac{\pi}{2} \right) = M_{dd}^{rr} \end{aligned}$$

Los coeficientes donde se tiene de manera repetida los subíndices y superíndices, se refieren a las inductancias propias, ya que por ejemplo  $M_{dd}^{rr}$  se leería como la inductancia mutua del rotor en el eje  $d$  debido al flujo de la bobina de rotor del eje  $d$ . Entonces la matriz de coeficientes rotacionales resulta:

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c|c|c|c|c} & \begin{array}{c} s \\ d \end{array} & \begin{array}{c} r \\ d \end{array} & \begin{array}{c} s \\ q \end{array} & \begin{array}{c} r \\ q \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} s \\ d \end{array} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \begin{array}{c} r \\ d \end{array} & 0 & 0 & -M_{qq}^{rs} & -L_q^r \\ \hline \begin{array}{c} s \\ q \end{array} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \begin{array}{c} r \\ q \end{array} & M_{dd}^{rs} & L_d^r & 0 & 0 \end{array} \quad (3.90)$$

Sustituyendo (3.86) y (3.90) en la ecuación general de las máquinas (3.84) se tiene:

$$\begin{bmatrix} v_d^s \\ v_d^r \\ v_q^s \\ v_q^r \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} R_d^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_d^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_q^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_q^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d^s & M_{dd}^{sr} & 0 & 0 \\ M_{dd}^{rs} & L_d^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_q^s & M_{qq}^{sr} \\ 0 & 0 & M_{qq}^{rs} & L_q^r \end{bmatrix} \frac{d}{dt} + \omega_r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_{qq}^{rs} & L_q^r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{dd}^{rs} & L_d^r & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_d^r \\ i_q^s \\ i_q^r \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Lo desarrollado en este apartado, consiste en el modelo en corrientes de la máquina de inducción. En forma matricial, partiendo de la ecuación general de las máquinas despejando las corrientes como variables de estado se tiene:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i} = \mathbf{L}^{-1} \{ \mathbf{v} - \mathbf{Ri} - \omega_r \mathbf{Gi} \} \quad (3.92)$$

En las simulaciones que se harán en el siguiente capítulo, se utilizará el modelo en enlaces de flujo, debido a que éste es más eficiente. Aunque ambos modelos implican la inversión de la matriz de inductancias, en el modelo de enlaces ésta no se lleva a cabo dentro de las ecuaciones diferenciales, lo que provoca un menor esfuerzo computacional. Cuando una máquina de inducción es simulada en  $dq0$  se puede optar por utilizar cualquier marco de referencia, aunado a esto se puede elegir la relación entre las variables de  $abc$  y  $dq0$  el cual se manifiesta en la constante que afecta a la matriz de transformación, ésto con el objetivo de facilitar la obtención de una interpretación física de los valores expresados en  $dq0$ . En el análisis de máquinas eléctricas y sistemas de potencia, los marcos de referencia comúnmente utilizados son el estacionario, el del rotor y el síncrono,

así como la utilización del factor de  $\frac{2}{3}$ , usado en la matriz de transformación de Park empleada en [Krause et al., 2002], el cual provoca que la amplitud de las corrientes en  $abc$  sea igual a la amplitud de las mismas en  $dq0$ .

En caso de escoger el marco de referencia estacionario, las variables  $dq$  de estator se relacionan de manera aritmética con las variables en  $abc$ . Con el marco de referencia fijo en el estator y en particular si la condición inicial del marco de referencia es cero, las variables de voltaje y corriente se relacionan como  $v_{ds} = v_{as}$  y  $i_{ds} = i_{as}$ . Las variables del rotor son referidas al marco de referencia estacionario y su frecuencia es entonces igual a la de la fuente de suministro.

En el marco de referencia referido al rotor, las variables del estator son referidas al rotor y por ende éstas varían a la frecuencia de las corrientes del rotor, la cual está dada por el deslizamiento. Considerando que tanto el marco de referencia como la posición del rotor tienen condiciones iniciales iguales, los voltajes y las corrientes de  $abc$  se relacionan con las variables transformadas como  $v'_{ar} = v'_{dr}$  y  $i'_{ar} = i'_{dr}$ .

En la velocidad síncrona el marco de referencia del rotor se vuelve al marco de referencia síncrono. Debido a que la máquina esencialmente opera en estado estable al alcanzar la velocidad síncrona, las variables se vuelven constantes, cuyo valor constante corresponde al valor instantáneo, en el momento en que la velocidad del rotor se vuelve igual a la velocidad síncrona.



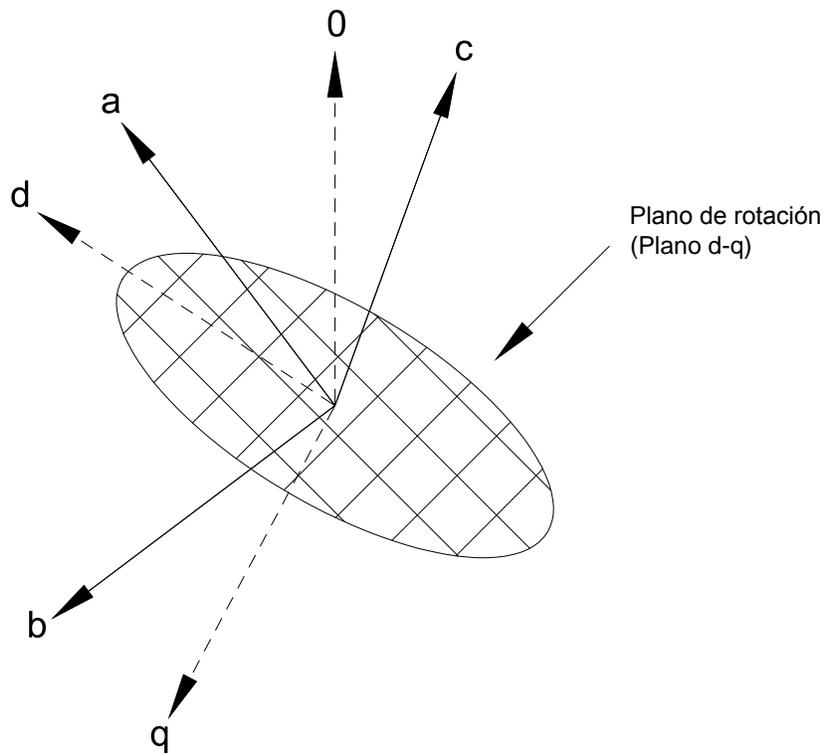
# Capítulo 4

## Simulación de la máquina de inducción con no linealidades

El modelado de las máquinas eléctricas de corriente alterna ha sido un área activa de investigación por un largo período de tiempo. Dependiendo del grado de detalle y precisión, uno puede elegir entre distintos tipos de modelados, como lo son los obtenidos mediante el método de elemento finito, los modelos basados en circuitos magnéticos, los modelos en circuitos eléctricos con parámetros concentrados, etc. En este trabajo de tesis y concretamente en este capítulo, se utilizan los llamados *modelos de propósito general* [Krause et al., 2002] de  $abc$  y  $dq0$ . Aunque estos modelos están basados en una serie de consideraciones especiales, su precisión por lo general es considerada suficiente en estudios relacionados con fenómenos transitorios [Therrien et al., 2013]. Por esta razón, se analizará el comportamiento de la máquina de inducción a partir de sus variables eléctricas y mecánicas frente a condiciones de contingencia.

Posteriormente se incorpora, el fenómeno de saturación, utilizando una variante de la *metodología de un solo factor de saturación* [Therrien et al., 2013], la cual es únicamente válida en el modelo en  $dq0$  de la máquina. Esta variante que se propone, es gracias a la reinterpretación geométrica que se hace en [Lipo, 2012], la cual permite contemplar la inclusión del eje 0 cuando el sistema se encuentra desbalanceado. En la figura 4.1, se presenta la interpretación geométrica que hace Lipo, la cual consiste en considerar de entrada al sistema trifásico en  $abc$  como un sistema coordinado ortogonal en  $\mathbb{R}^3$ , al cual

se le aplica una matriz de rotación propia, siendo ésta la transformada de Park. Bajo condiciones balanceadas, no existirán componentes en el eje 0, sin embargo, bajo una contingencia asimétrica el vector resultante no estará únicamente definido en el plano generado en  $\mathbb{R}^3$  por los ejes  $dq$ , es decir se tendrá un vector en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Se puede obtener la magnitud de este vector, así como la posición del mismo dependiendo del eje que se establezca como referencia, entonces el enfoque de análisis cambia, en el sentido de que este vector es más fácil de interpretar si se trata de manera análoga al análisis que se realiza en coordenadas polares.



**Figura 4.1:** Plano de rotación definido por los ejes  $dq$

## 4.1. Ecuaciones diferencio-algebraicas

El modelo de la máquina de inducción plantea un sistema de ecuaciones diferencio-algebraico (EDA) con coeficientes variantes en el tiempo. Una solución analítica para

las ecuaciones diferenciales no lineales, en términos generales no existe. Por lo cual la utilización de técnicas de integración numérica para obtener una solución aproximada resulta imperativo. En el capítulo 3 se propuso mediante la utilización de la teoría de marcos de referencia la opción de eliminar los coeficientes variantes en el tiempo, sin embargo el modelo de la máquina de inducción todavía plantea el reto de resolver un sistema de EDA. Como ya se ha comentado la definición más simple para las EDA's consiste en un sistema de EDO's con restricciones algebraicas en las variables [Pérez, 2004].

Las EDA's se pueden considerar una extensión de las EDO's. La interpretación física de un sistema de EDA es que su dinámica queda restringida por las ecuaciones algebraicas.

La estructura de las EDA's se puede plantear de la siguiente forma:

$$x' = f(t, x, z) \quad (4.1)$$

$$0 = g(t, x, z) \quad (4.2)$$

La expresión (4.1) es una EDO, donde  $x(t)$  depende de las variables algebraicas adicionales  $z(t)$  además de esto la solución de la EDO está supeditada a satisfacer las restricciones algebraicas dadas en (4.2).

Un sistema de EDA's envuelve una mezcla de diferenciaciones e integraciones, se espera que aplicando diferenciaciones analíticas a un sistema dado, reduciendo lo necesario y repitiendo las diferenciaciones de manera conveniente, se alcance un sistema de EDO's explícito para todas las incógnitas. Esto es cierto a menos que el problema sea singular, es decir que alguna de las derivadas no sea continua [Ascher and Petzold, 1998]. Se entiende por EDO explícita a la forma en la que la primer derivada de la función se escribe como función solamente de sí misma y del tiempo. Es decir:

$$y' = f(t, y) \quad (4.3)$$

El enfoque numérico para la solución de EDA's puede dividirse en dos clases:

- a) Discretización directa del sistema dado.
- b) Métodos que requieren una reformulación para reducir el índice y combinados con una discretización

Antes de comentar sobre las dos clases de enfoques numéricos para la solución de EDA's, es necesaria la introducción del concepto de *índice*. En general el *índice* de un sistema de EDA's, es el número mínimo de diferenciaciones del sistema que serían requeridas para resolver  $y'$  unicamente en función de  $y$  y de  $t$ . En otras palabras es el número necesario de diferenciaciones, para escribir el sistema de EDA en forma explícita como en (4.3). Retomando el tema de los enfoque numéricos, la reformulación del sistema puede ser costosa, sobre todo para sistemas reales de grandes dimensiones, no obstante es necesaria puesto que la discretización directa está limitada a sistemas de EDA's de índice 1. Afortunadamente la mayoría de los sistemas EDA's que modelan sistemas reales son de índice 1. De hecho los modelos de la máquina de inducción desarrollados en el capítulo 3, pertenecen a este tipo, por lo que al utilizar un método de solución de integración, en este caso el Runge-Kutta de cuarto orden, se discretiza de manera directa el sistema de ecuaciones, esto permite considerar a cada intervalo en cada paso de integración de manera lineal.

## 4.2. Simulación del modelo lineal de la máquina de inducción con contingencias

A continuación se muestran los resultados obtenidos al simular casos de fallas simétricas y asimétricas tanto con el modelo en enlaces de flujo en  $abc$  como en  $dq0$ , esto con la finalidad de interpretar y analizar el fenómeno físico que subyace dentro del modelo matemático propuesto.

Los parámetros propuestos en [Krause et al., 2002] de la máquina de inducción y utilizados en este apartado son los siguientes:

Tabla 4.1: Parámetros de la máquina de inducción

hp	Volts	$T_L$ ( $N \cdot m$ )	$r_s$ ( $\Omega$ )	$L_s$ ( $mH$ )	$L_m$ ( $mH$ )	$L'_r$ ( $mH$ )	$r'_r$ ( $\Omega$ )	$J$ ( $kg \cdot m^2$ )
50	460	198	0.087	0.801079	34.695777	0.801079	0.228	1.662

Los disturbios que se aplicarán a los modelos serán una falla monofásica (falla

asimétrica) o una falla trifásica (falla simétrica). Donde la falla monofásica consiste en llevar el voltaje de la fase  $a$ ,  $b$  o  $c$  a cero. La falla trifásica consiste en llevar todos los voltajes de fase a cero.

#### 4.2.1. Simulación en $abc$ durante una falla monofásica y una falla trifásica

El modelo en enlaces de flujo en coordenadas  $abc$  a simular en este apartado es el siguiente EDA:

Conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\lambda_{as}}{dt} = v_{as} - r_s i_{as} \quad (4.4)$$

$$\frac{d\lambda_{bs}}{dt} = v_{bs} - r_s i_{bs} \quad (4.5)$$

$$\frac{d\lambda_{cs}}{dt} = v_{bs} - r_s i_{bs} \quad (4.6)$$

$$\frac{d\lambda'_{ar}}{dt} = v'_{ar} - r'_r i'_{as} \quad (4.7)$$

$$\frac{d\lambda'_{br}}{dt} = v'_{br} - r'_r i'_{bs} \quad (4.8)$$

$$\frac{d\lambda'_{cr}}{dt} = v'_{cr} - r'_r i'_{cs} \quad (4.9)$$

$$\frac{d\omega_{rm}}{dt} = \frac{T_e - T_L}{J} \quad (4.10)$$

$$\frac{d\theta_{rm}}{dt} = \omega_{rm} \quad (4.11)$$

Conjunto de restricciones algebraicas

$$T_e = \left(\frac{P}{2}\right) (\mathbf{i}_{abcs})^T \frac{\partial}{\partial \theta_r} [\mathbf{L}'_{sr}] \mathbf{i}'_{abcr} \quad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abcs} \\ \mathbf{i}'_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}'_{sr} \\ (\mathbf{L}'_{sr})^T & \mathbf{L}'_r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{abcs} \\ \boldsymbol{\lambda}'_{abcr} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Con la fuente de alimentación siguiente:

$$v_{as} = \sqrt{\frac{2}{3}} V_{LL} \cos(\omega_b t) \quad (4.14)$$

$$v_{bs} = \sqrt{\frac{2}{3}} V_{LL} \cos\left(\omega_b t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (4.15)$$

$$v_{cs} = \sqrt{\frac{2}{3}} V_{LL} \cos\left(\omega_b t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (4.16)$$

$$v'_{ar} = 0 \quad (4.17)$$

$$v'_{br} = 0 \quad (4.18)$$

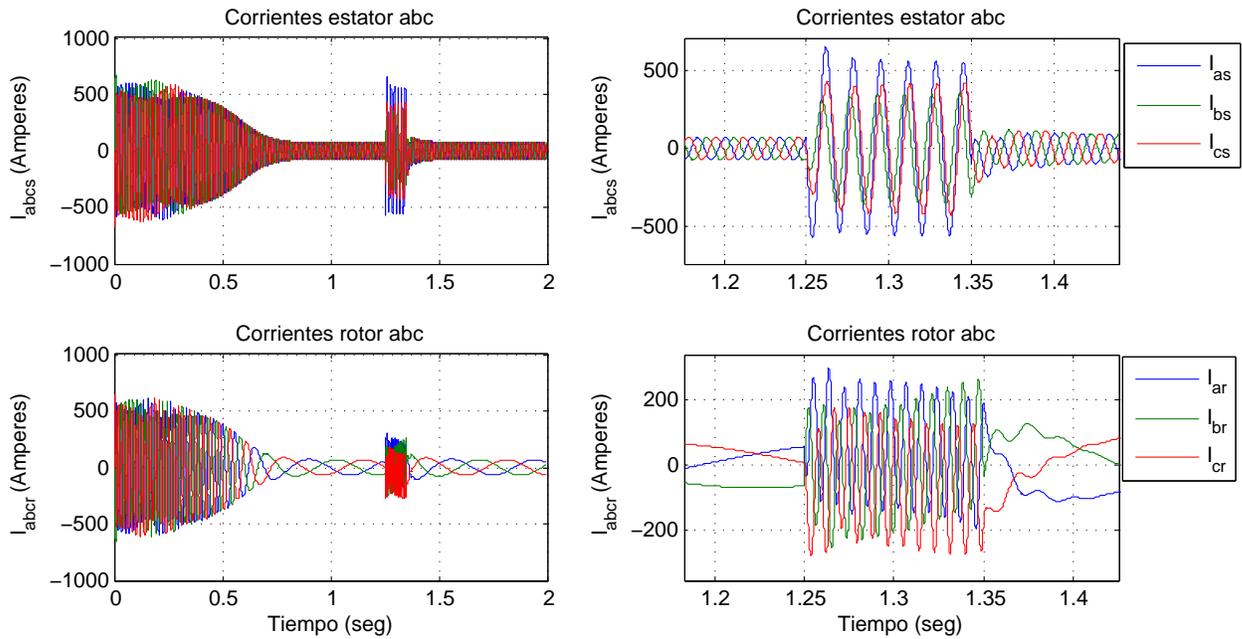
$$v'_{cr} = 0 \quad (4.19)$$

El modelo se simula utilizando un programa desarrollado en MATLAB con los siguientes parámetros de simulación.

Tabla 4.2: Parámetros simulación de la máquina de inducción en *abc*

Condiciones iniciales de los estados	Método numérico	Paso de integración	Tiempo de simulación	Tiempo de falla
[0]	Runge-Kutta 4°	$1 \times 10^{-4}$	2 seg	6 ciclos

En primera instancia se comentará sobre el desempeño de la máquina de inducción usando los parámetros de la tabla 4.1, donde el voltaje se refiere al voltaje rms de línea a línea con una frecuencia de 60 Hz. Se considera un tiempo total de dos segundos de simulación, tiempo suficiente para que la máquina pase de estar en reposo al estado estable, se ocasiona una falla con duración de seis ciclos, se libera la falla y se retorna al estado estable. Se considera esta duración de la falla ya que es el tiempo aproximado en el tienen que actuar las protecciones para liberar la falla. En la figura 4.2, se muestran las corrientes en *abc* tanto de estator como de rotor durante una falla monofásica, voltaje de la fase *a* a tierra.

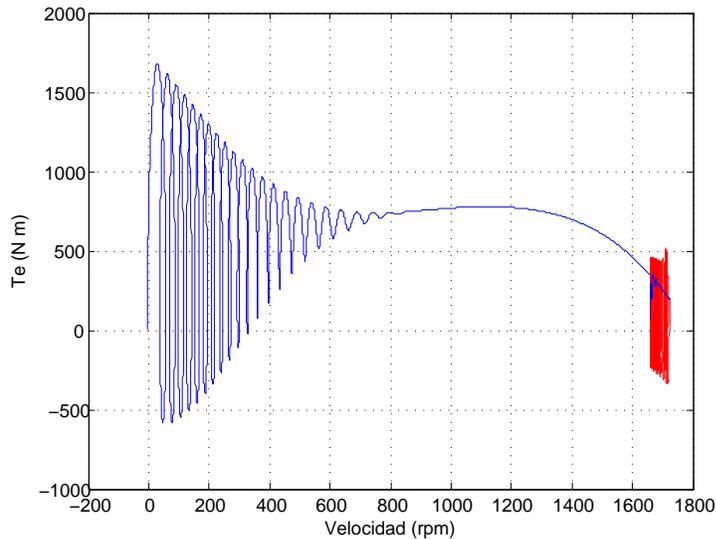


**Figura 4.2:** Corrientes de  $abc$  durante una falla monofásica a tierra en la fase  $a$

En la figura 4.2 se puede apreciar que el transitorio de arranque dura aproximadamente 0.8 segundos, a los 1.25 segundos se aplica una falla monofásica con duración de seis ciclos. También se puede apreciar que las corrientes del estator poseen la frecuencia de la fuente de alimentación, mientras que la frecuencia de las corrientes inducidas en el rotor es distinta. Esta frecuencia corresponde a la diferencia en la velocidad del campo magnético giratorio debido a las corrientes de estator y la velocidad del rotor. Las corrientes inducidas en el rotor producirán en cambio un campo magnético giratorio que rotará de manera relativa al rotor, a una velocidad correspondiente a la frecuencia de las corrientes del rotor. Estos dos campos magnéticos giratorios que rotan al unísono pueden ser considerados como dos conjuntos de polos magnéticos que giran de manera síncrona. El par es entonces producido por la interacción de estos dos sistemas magnéticos. Sin embargo cabe hacer mención que si el campo magnético del rotor gira a la misma velocidad que el campo magnético giratorio producido por las corrientes de estator no existirá par, esto debido a que no habrá inducción de corriente en los devanados cortocircuitados del rotor.

En la figura 4.3 se muestra la curva característica par-velocidad de la máquina de

inducción durante una falla monofásica, se resalta en color rojo, la parte que corresponde al período de la falla.

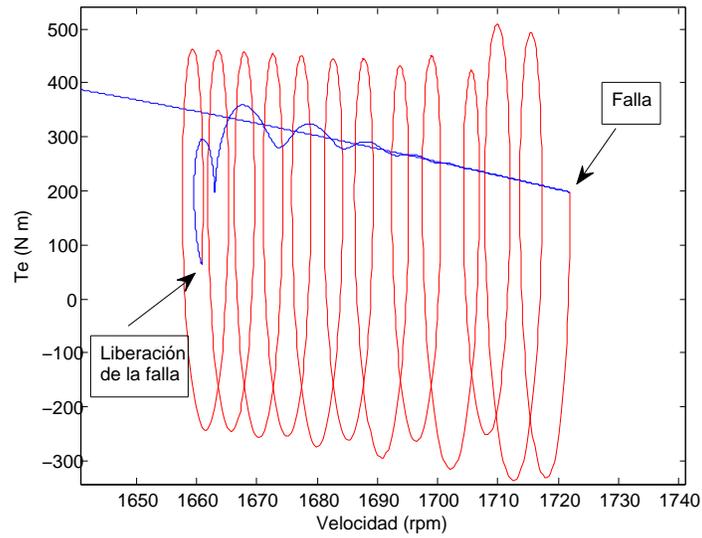


**Figura 4.3:** Curva característica par velocidad durante una falla monofásica

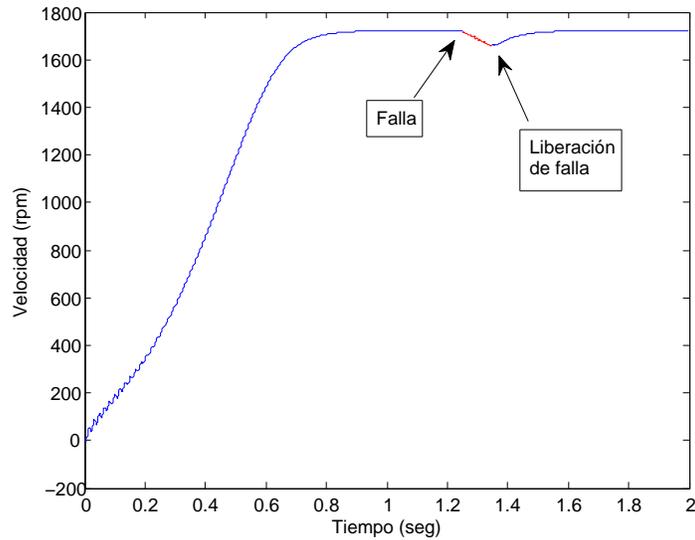
Cuando la máquina es arrancada del reposo, ésta oscila como parte del transitorio de arranque, se da el tiempo suficiente para que llegue a su velocidad en estado estable, es entonces que se provoca la falla monofásica, la máquina pierde velocidad y el par electromagnético oscila, sin embargo en esta figura no se alcanzan a observar con detalle, las oscilaciones.

Resulta instructivo hacer un acercamiento a la figura 4.3 precisamente en el momento en que se realiza la falla. Este acercamiento se muestra en la figura 4.4. La máquina se desacelera y el par electromagnético cambia de sentido en repetidas ocasiones.

Esto puede llevar a la idea de que la máquina en un determinado momento ha empezado a girar en el sentido contrario. Esto se puede apreciar de mejor manera si se analiza por separado la velocidad angular del rotor. En la figura 4.5 se muestra en color rojo el instante en que la falla ha sido ocasionada. Se puede ver que la máquina apenas empieza a desacelerar, esto debido a que las variables mecánicas son mucho más lentas con respecto a las variables eléctricas del sistema.



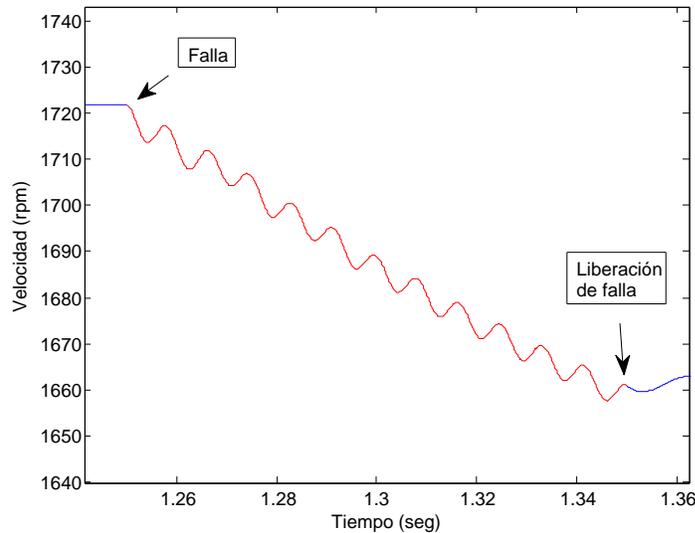
**Figura 4.4:** Acercamiento a la curva característica por velocidad durante la falla monofásica



**Figura 4.5:** Curva característica de velocidad en durante una falla monofásica en *abc*

Si se hace un acercamiento en el momento de la contingencia, en la figura 4.5, se puede ver precisamente, la desaceleración de la máquina, sin embargo debido a que ésta no se presenta en forma suave, significa que el rotor se acelera y desacelera en respuesta

a la falla monofásica que se ha presentado como se muestra en la figura 4.6.

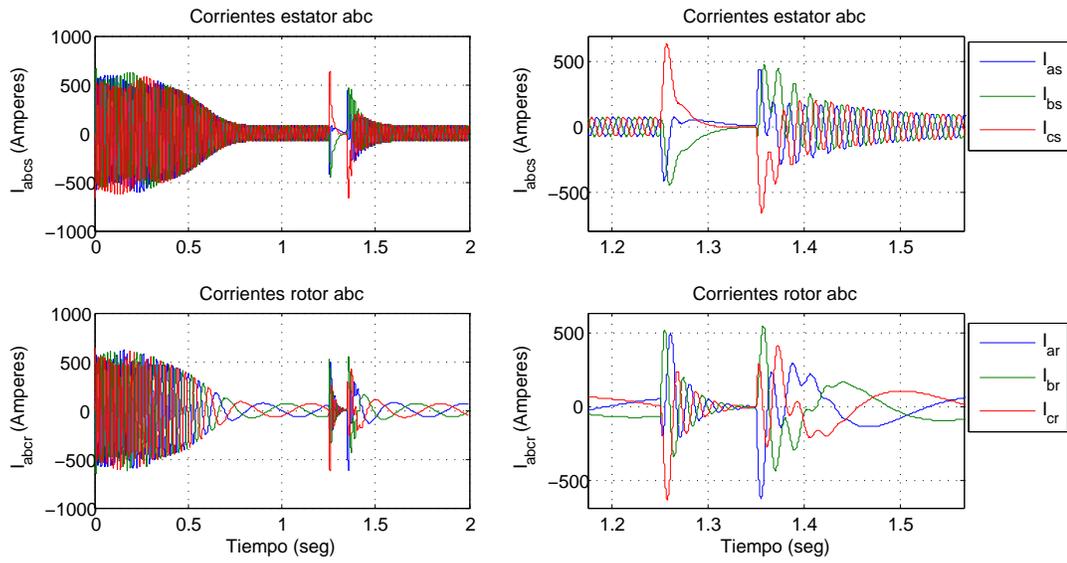


**Figura 4.6:** Acercamiento en la curva característica de velocidad en durante una falla monofásica en *abc*

Analizando desde el punto de vista del par electromagnético la máquina en el momento de la falla cambia de su acción como motor a generador, en repetidas ocasiones como se muestra en la figura 4.4, esto debido a que las dos fases que aún reciben alimentación, suministran corriente a la falla y a la vez tratan de compensar el sistema para que éste continúe en su estado anterior a la falla.

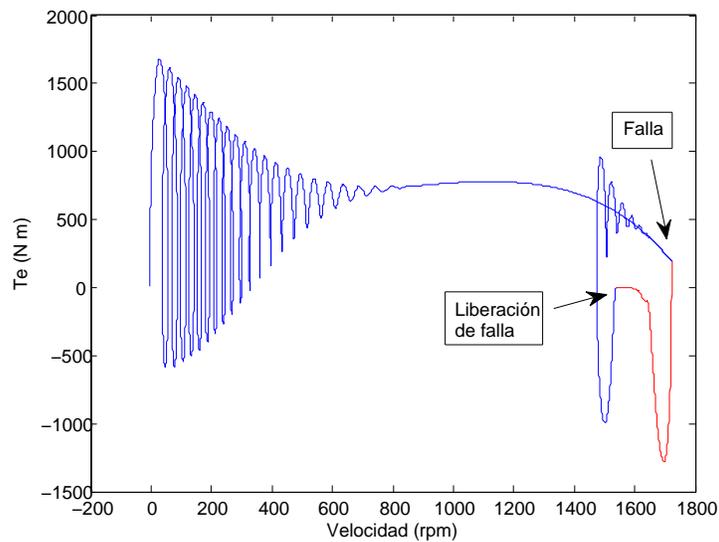
Ahora se aplicará una falla de tipo trifásica, las corrientes de estator y rotor se muestran en la figura 4.7, a los 1.25 segundos se ocasiona la falla trifásica a tierra, las corrientes en ese instante se disparan por encima de su rango nominal, debido que el voltaje en sus tres terminales súbitamente ha cambiado a cero. Durante los seis ciclos de la frecuencia que dura la falla, las corrientes alcanzan un valor cercano a cero, tanto en el devanado del estator como en el del rotor esto debido a que la máquina, ahora alimenta la falla, es decir desde la perspectiva de la falla, ésta ve a la máquina como un generador, debido al cambio de signo en el par electromagnético como se muestra en color rojo en la figura 4.8.

En la figura 4.8, la cual corresponde a la curva característica de la relación par velocidad, se muestra en color rojo los valores correspondientes al tiempo de falla. En



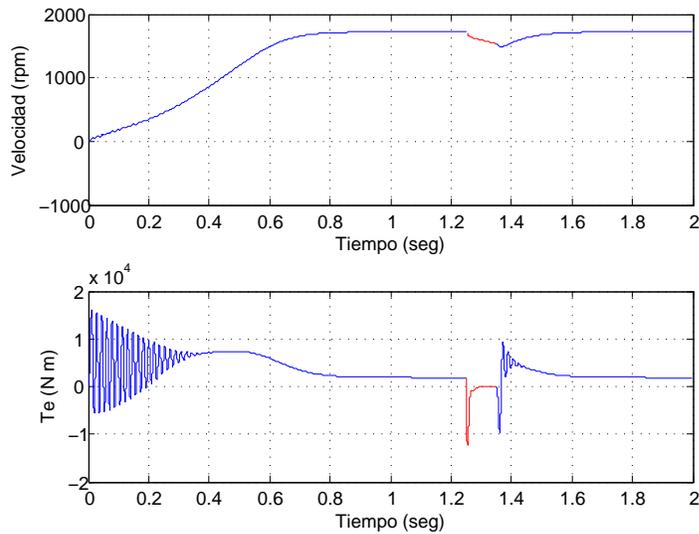
**Figura 4.7:** Corrientes de *abc* durante una falla trifásica

comparación a la figura 4.3, la cual se obtuvo en el caso monofásico no tiene un efecto oscilatorio en el par, sin embargo si produce un efecto mucho mayor, ya que este cambio en el par ocurre casi de manera instantánea.



**Figura 4.8:** Curva característica par velocidad durante una falla trifásica

Sin embargo el cambio en la velocidad mecánica del rotor, resulta en un movimiento



**Figura 4.9:** Formas de onda de la velocidad y el par durante una falla trifásica

menos oscilatorio que el que ocurre durante una falla monofásica. Ésto se puede ver en la figura 4.9, en ésta figura se puede apreciar de manera más fácil la velocidad de reacción relativa que se tiene entre los sistemas mecánicos y eléctricos que coexisten en la máquina de inducción. Los resultados obtenidos se compararon con los presentados en [Krause et al., 2002], con lo cual se validan los modelos implementados.

#### 4.2.2. Simulación en $dq0$ durante una falla monofásica y una falla trifásica

El modelo en enlaces de flujo en coordenadas  $dq0$  usando la matriz ortonormal de Park a simularse en este apartado es el siguiente sistema de EDA:

Conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}\lambda_{ds} = v_{ds} - r_s i_{ds} + \omega \lambda_{qs} \quad (4.20)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_{qs} = v_{qs} - r_s i_{qs} - \omega \lambda_{ds} \quad (4.21)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_{0s} = v_{0s} - r_s i_{0s} \quad (4.22)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda'_{dr} = v'_{dr} - r'_r i'_{dr} + (\omega - \omega_r)\lambda'_{qr} \quad (4.23)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda'_{qr} = v'_{qr} - r'_r i'_{qr} - (\omega - \omega_r)\lambda'_{dr} \quad (4.24)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda'_{0r} = v'_{0r} - r'_r i'_{0r} \quad (4.25)$$

$$\frac{d\omega_{rm}}{dt} = \frac{T_e - T_L}{J} \quad (4.26)$$

$$\frac{d\theta_{rm}}{dt} = \omega_{rm} \quad (4.27)$$

Conjunto de restricciones algebraicas

$$T_e = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{P}{2}\right) L_{ms} (i_{qs} i'_{dr} - i_{ds} i'_{qr}) \quad (4.28)$$

$$\mathbf{I}_{dq0} = \mathbf{L}_{dq0}^{-1} \boldsymbol{\lambda}_{dq0} \quad (4.29)$$

Con la fuente de alimentación siguiente:

$$v_{ds} = V_{LL} \cos(\omega_b t - \theta) \quad (4.30)$$

$$v_{qs} = V_{LL} \text{sen}(\omega_b t - \theta) \quad (4.31)$$

$$v_{0s} = 0 \quad (4.32)$$

$$v_{dr} = 0 \quad (4.33)$$

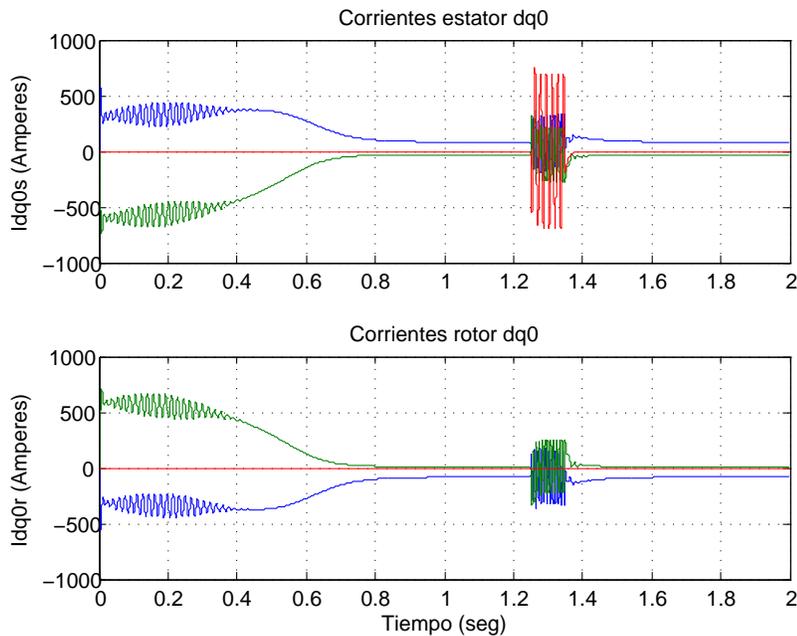
$$v_{qr} = 0 \quad (4.34)$$

$$v_{0r} = 0 \quad (4.35)$$

$$(4.36)$$

De igual forma que en el modelo en  $abc$ , se simulará la máquina de inducción, usando los parámetros de la tabla 4.1 y las condiciones de simulación de la tabla 4.2, pero ahora en el marco de referencia arbitrario, es decir en los ejes ortogonales  $dq0$ . A pesar de que el número de opciones es ilimitado, en este trabajo de tesis solamente se expondrá el marco de referencia síncrono, el cual consiste en usar el marco de referencia giratorio que rota a una velocidad angular eléctrica que corresponde a la frecuencia fundamental de las variables eléctricas asociadas con los circuitos estacionarios.

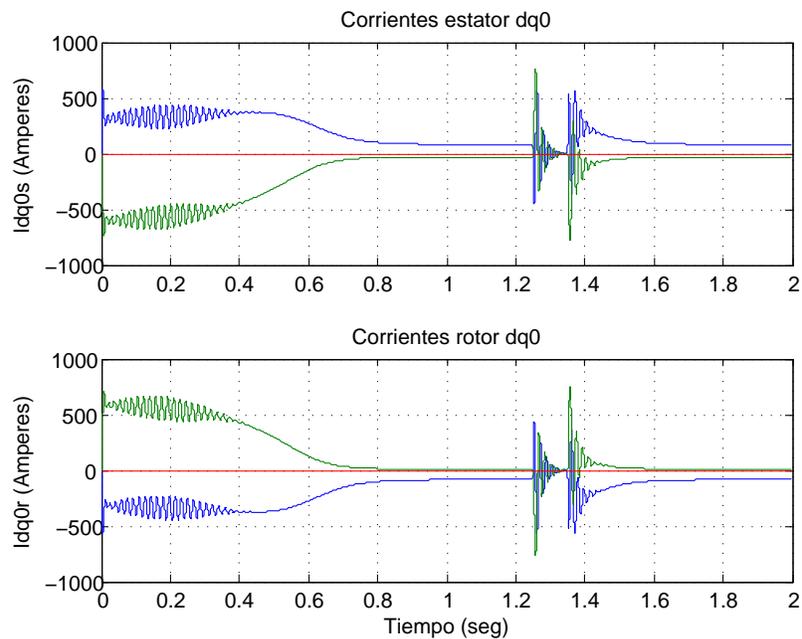
En primera instancia se analizará la respuesta tanto de las corrientes de estator como de rotor ante una falla monofásica, la cual se engloba dentro de las llamadas fallas asimétricas. Recordando, de la subsección 2.2.4, el último renglón de la matriz de transformación de Park, la llamada corriente de secuencia cero de la expresión (2.28), es una condición de equilibrio. En el caso de que se tenga una falla de tipo asimétrica, la componente del eje 0 tendrá injerencia dentro del sistema, es decir las componentes de los ejes  $d$  y  $q$  no podrán más representar la acción de un sistema trifásico, lo que provoca que la teoría de dos ejes no pueda más ser aplicada de manera directa.



**Figura 4.10:** Corrientes en  $dq0$  en el marco de referencia síncrono, durante una falla monofásica

En este caso, no es posible hablar de una transformación de tres a dos ejes. Es imperativo concebir a la transformada de Park como una transformación de tres ejes a tres ejes, de lo contrario la información del desbalance estaría siendo ignorada en su totalidad. En la figura 4.10, se tienen las corrientes de estator y rotor desde el marco de referencia síncrono durante una falla monofásica. La velocidad relativa entre los circuitos del estator y rotor será constante, ésto debido a que los circuitos eléctricos del rotor son transformados a un marco de referencia fijo en el estator y lo que provoca que éstos viajen a una velocidad angular igual a la de las fuentes de suministro.

Expresar una falla asimétrica en  $dq0$ , no es posible de manera directa, ya que en esta referencia los voltajes de alimentación en el estator se expresan como en (3.47), por lo que es necesario en primera instancia considerar la falla en el sistema trifásico de  $abc$ , y luego aplicar la matriz de transformación para obtener los valores en  $dq0$ .

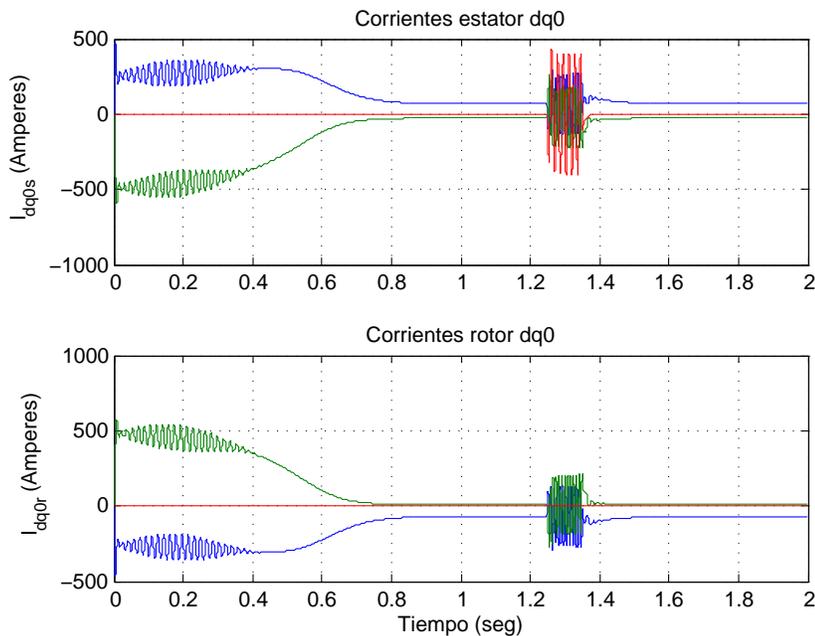


**Figura 4.11:** Corrientes en  $dq0$  en el marco de referencia síncrono, durante una falla trifásica

Debido a que la transformada de Park, modifica únicamente el marco de referencia de circuitos eléctricos, comentar sobre las variables mecánicas puede resultar redundante,

es decir las figuras 4.3 y 4.5 se obtienen de manera directa a pesar de que se esté en el sistema de  $dq0$ .

En el caso de una falla trifásica, es decir una falla simétrica, la condición de equilibrio no refleja que exista un desbalance, esto debido a que los valores en  $abc$  han sido afectados de igual manera, por lo que al transformar el vector de corrientes a  $dq0$ , se tiene la misma cantidad de desbalance en cada uno de los ejes. En la figura 4.11, se muestra desde el marco de referencia síncrono las señales de corriente ante una falla trifásica a tierra. Como se menciona una de las componentes se mantiene en cero, durante el tiempo de contingencia, ésta corresponde a la componente del eje 0.



**Figura 4.12:** Corrientes en  $dq0$  en el marco de referencia síncrono usando la transformada clásica de Park, durante una falla monofásica

Durante el transitorio de arranque, la componente del eje 0 debe ser igual cero, esto debido a que a éste no se le atribuye que proporcione par, esta componente solo refleja el desbalance de la alimentación, es decir solamente aporta información en el caso de que se presente alguna contingencia asimétrica.

Con el fin de comparar los resultados que obtienen usando la transformación ortogonal con el modelo en enlaces de flujo en coordenadas  $dq0$  usando la matriz de

transformación de Park [Krause et al., 2002] se simula en este apartado el siguiente sistema de EDA:

Conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}\lambda_{qs} = v_{qs} - r_s i_{qs} - \omega \lambda_{ds} \quad (4.37)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_{ds} = v_{ds} - r_s i_{ds} + \omega \lambda_{qs} \quad (4.38)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_{0s} = v_{0s} - r_s i_{0s} \quad (4.39)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda'_{qr} = v'_{qr} - r'_r i'_{qr} - (\omega - \omega_r)\lambda'_{dr} \quad (4.40)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda'_{dr} = v'_{dr} - r'_r i'_{dr} + (\omega - \omega_r)\lambda'_{qr} \quad (4.41)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda'_{0r} = v'_{0r} - r'_r i'_{0r} \quad (4.42)$$

$$\frac{d\omega_{rm}}{dt} = \frac{T_e - T_L}{J} \quad (4.43)$$

$$\frac{d\theta_{rm}}{dt} = \omega_{rm} \quad (4.44)$$

Conjunto de restricciones algebraicas

$$T_e = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{P}{2}\right) (\lambda_{ds} i_{qs} - \lambda_{qs} i_{ds}) \quad (4.45)$$

$$\mathbf{I}_{qd0} = \mathbf{L}_{qd0}^{-1} \boldsymbol{\lambda}_{qd0} \quad (4.46)$$

Con la fuente de alimentación siguiente:

$$v_{ds} = \sqrt{\frac{2}{3}} V_{LL} \cos(\omega_b t - \theta) \quad (4.47)$$

$$v_{qs} = -\sqrt{\frac{2}{3}} V_{LL} \sin(\omega_b t - \theta) \quad (4.48)$$

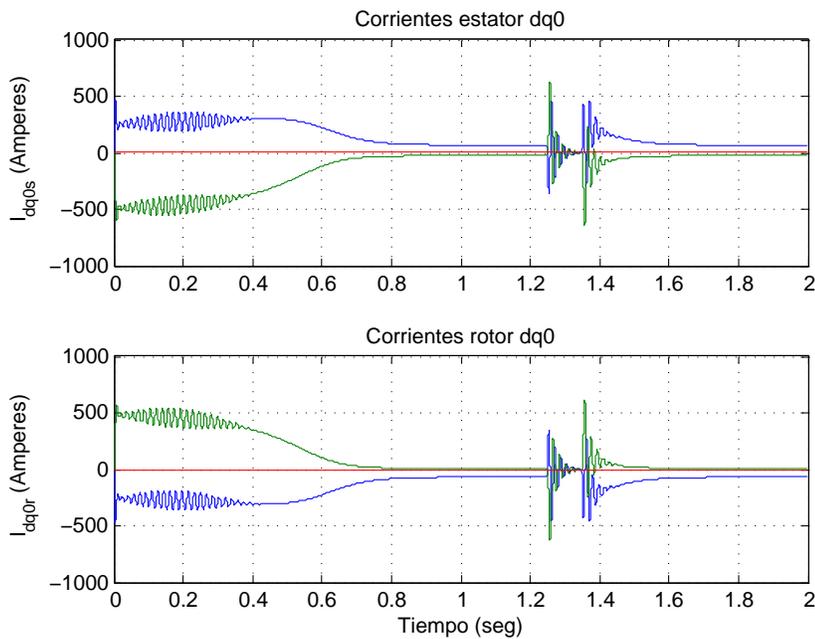
$$v_{0s} = 0 \quad (4.49)$$

$$v_{dr} = 0 \quad (4.50)$$

$$v_{qr} = 0 \quad (4.51)$$

$$v_{0r} = 0 \quad (4.52)$$

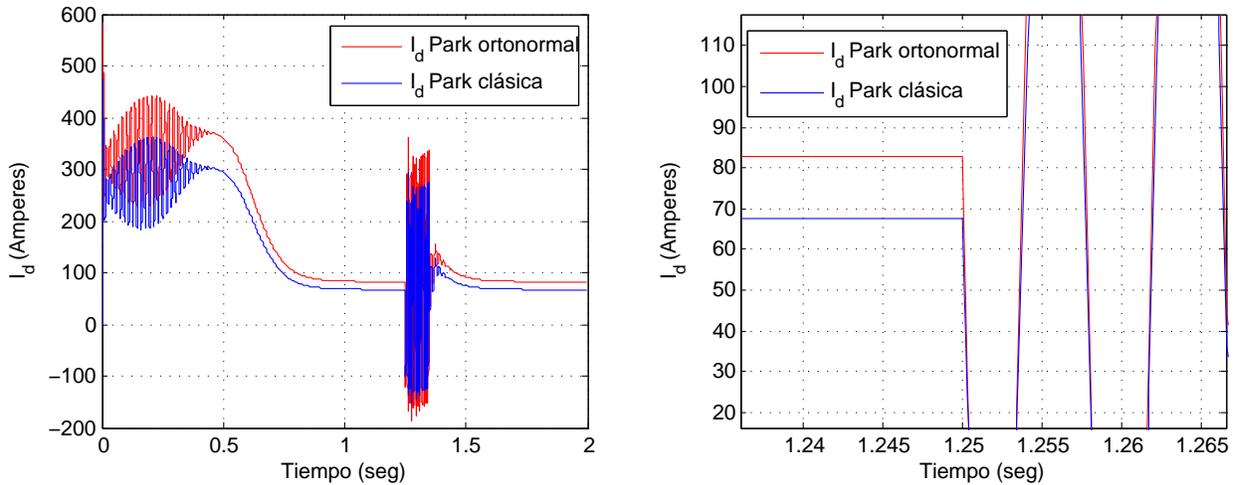
$$(4.53)$$



**Figura 4.13:** Corrientes en  $dq0$  en el marco de referencia síncrono con la transformada clásica de Park, durante una falla trifásica

La simulación es idéntica para el caso inmediato anterior, mismos parámetros, tiempo de simulación y aplicación del disturbio. Los resultados de las corrientes ante la falla monofásica se pueden observar en la figura 4.12 y 4.13 se observan éstas variables para la falla trifásica.

Se observa que el comportamiento es el mismo tanto en el estado transitorio como en el estado estable, resaltando solamente la magnitud en el valor de la corriente la cual es de  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  veces mayor al usar el modelo con la transformación ortonormal de Park con respecto al modelo usando la transformación de Park.



**Figura 4.14:** Comparación entre las corrientes  $i_d$  obtenidas con la transformación ortonormal de Park y la transformación clásica de Park

### 4.3. Simulación del modelo no lineal de la máquina de inducción

El modelo estándar en enlaces de flujo de la máquina de inducción en los ejes  $dq0$  presentado en la sección 3.2.2 ha sido usado desde principios del siglo XX, su derivación es producto de una serie de simplificaciones que facilitan el modelado, sin embargo en últimas fechas, con el auge de los dispositivos semiconductores, como lo son los controladores basados en electrónica de potencia y los sistemas de control digital, la precisión de este modelo no es suficiente, por lo que resulta necesario considerar los efectos despreciados en primera instancia.

La saturación de la *trayectoria principal de flujo* es usualmente modelada usando la relación no lineal que existe entre el enlace de flujo de magnetización y la corriente de magnetización. Debido a la estructura cilíndrica del rotor en las máquinas de inducción, la FMM de magnetización y el flujo de magnetización son colineales, así que una sola función es suficiente para representar la saturación en cualquier dirección dentro del marco de referencia en  $dq0$  [Aliprantis, 2003]. Esto corresponde a reemplazar la inductancia de magnetización  $L_m$  por una inductancia de saturación no lineal. Por ejemplo la característica de saturación puede ser expresada como  $\lambda_m = F(i_m)$  donde el enlace y la corriente están relacionados por las componentes de ejes ortogonales  $dq0$  como:

$$\lambda_m^2 = \lambda_{md}^2 + \lambda_{mq}^2 + \lambda_{m0}^2 \quad (4.54)$$

$$i_m^2 = i_{md}^2 + i_{mq}^2 + i_{m0}^2 \quad (4.55)$$

Donde:

$$\lambda_{md} = \lambda_{sd} + \lambda_{rd}, \quad i_{md} = i_{sd} + i_{rd}$$

$$\lambda_{mq} = \lambda_{sq} + \lambda_{rq}, \quad i_{mq} = i_{sq} + i_{rq}$$

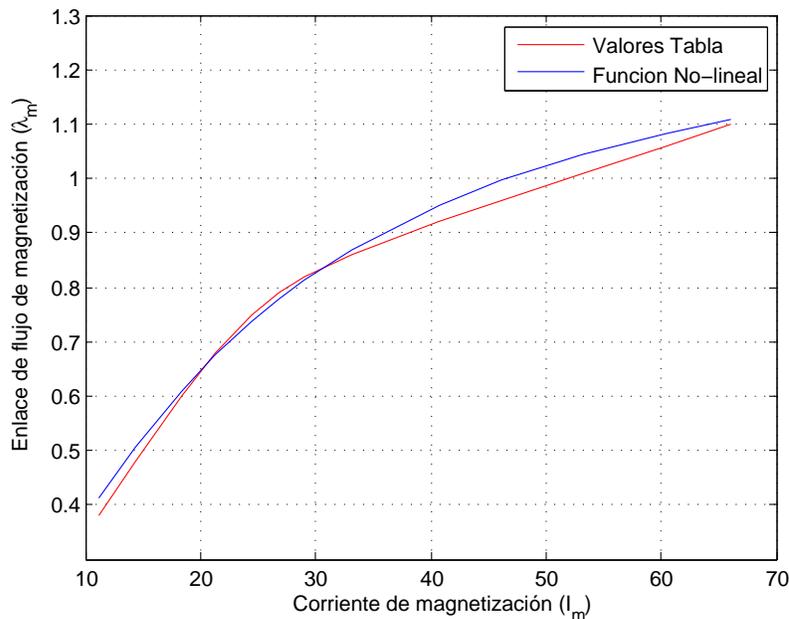
$$\lambda_{m0} = \lambda_{s0} + \lambda_{r0}, \quad i_{m0} = i_{s0} + i_{r0}$$

Siendo lo subíndices  $s$  y  $r$  referentes a estator y rotor respectivamente. Algunos autores proponen la saturación de la inductancia de dispersión [Lipo and Consoli, 1984], ya que ellos consideran que existirá saturación en los ranurados del devanado de estator y de rotor, por lo que en ese trabajo la definición de la inductancia de dispersión es distinta a la que se especifica en el capítulo 3 de este trabajo de tesis. Otros autores [Donescu et al., 1999] usan la transformada de Clark, para calcular la corriente de magnetización y el ángulo de la misma, para con esta información cambiar el modelo geométrico de las inductancias que propone en primera instancia. En este apartado, se utilizan los valores de la tabla 4.3 usados en [Therrien et al., 2013], para construir la curva de saturación usando la función arcotangente [Pérez, 2000], esto con la finalidad de que con cada valor obtenido de la corriente de magnetización mediante (4.55), se calcule el valor correspondiente al enlace de magnetización  $\lambda_m$  de acuerdo a la forma que tome la curva de saturación.

Tabla 4.3: Valores de saturación

$\lambda_m$ (Wb)	0.38	0.48	0.60	0.68	0.75	0.79	0.82	0.86	0.92	0.96	1.01	1.06	1.10
$i_m$ (A)	11.20	14.33	18.33	21.31	24.42	26.74	29.07	33.21	40.78	46.21	53.21	60.33	66.10

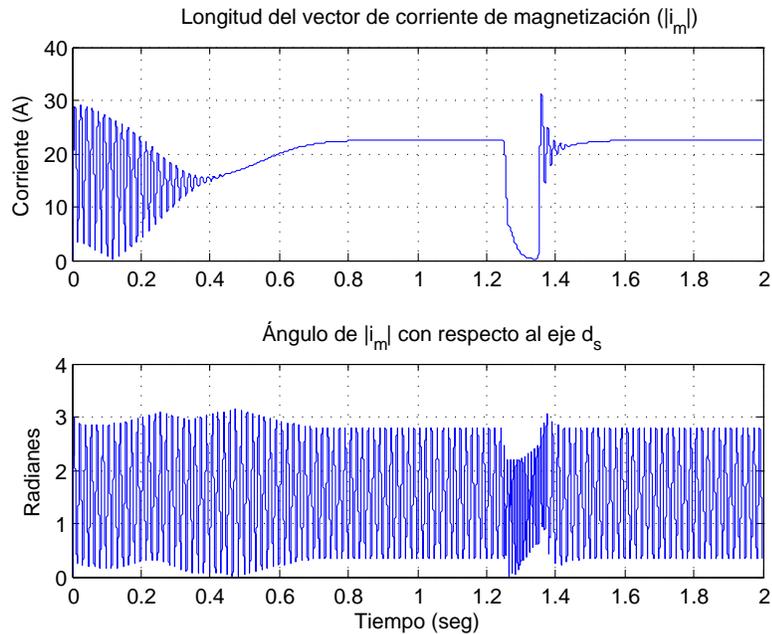
Se propone la función  $\lambda_m = 0.891 \tan^{-1}(0.04451i_m)$  para ajustar la curva de magnetización cuyos valores se encuentran dados en la tabla 4.3. Ambas gráficas se muestran en la figura 4.15.



**Figura 4.15:** Comparación curva de magnetización de la tabla 4.3 y con la función arcotangente

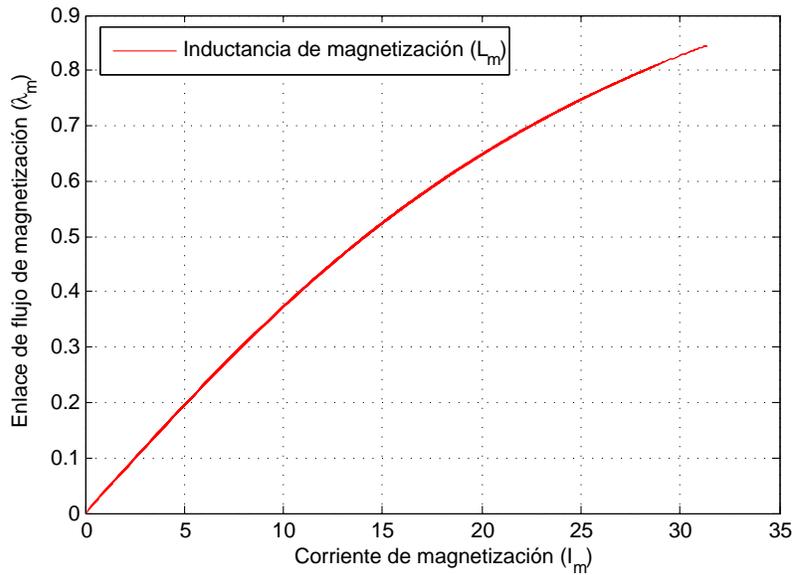
Se realiza la simulación de una máquina de inducción cuyos parámetros, están dados de igual manera que en la sección anterior por la tabla 4.1 en el marco de referencia síncrono con una falla trifásica aplicada a los 1.25 segundos con duración de seis ciclos. La corriente de magnetización se calcula usando (4.55), ahora bien éste es solamente un escalar que refleja la longitud del vector, es necesario saber la dirección y el sentido que toma el mismo para cada instante de tiempo. En la figura 4.16 se muestra la norma y el ángulo que hay entre el vector  $i_m$  y el eje  $d$ , al cual tomaremos como referencia. Esta combinación sirve como información para caracterizar la curva de saturación. En la

figura 4.17, se muestra la curva de saturación obtenida durante la simulación, esta curva cuya característica está dada por la inductancia de magnetización. Las condiciones de simulación y el hecho de que la característica no lineal sea suave, es decir la no linealidad, se encuentra muy cercana a la pendiente original dada por  $L_m$ .

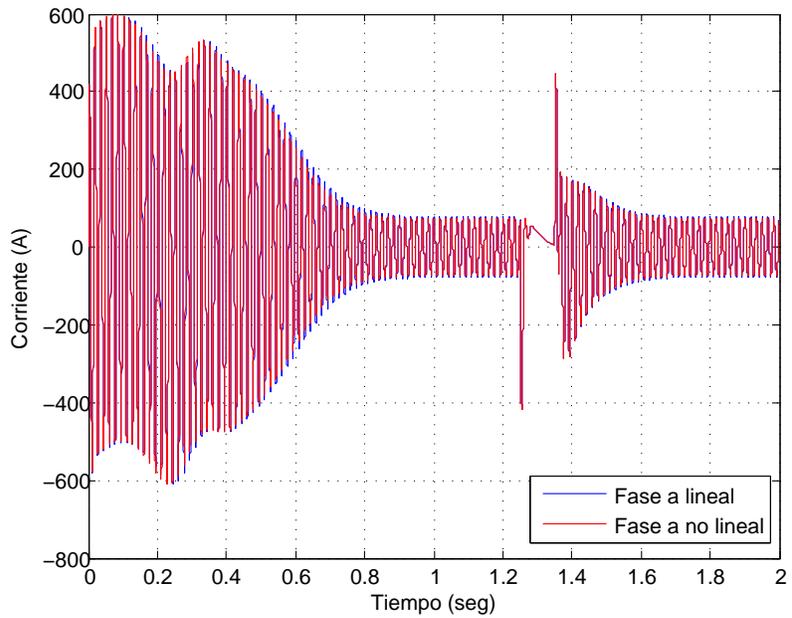


**Figura 4.16:** Longitud del vector ( $i_m$ ) y ángulo con respecto al eje  $d_s$

Para dimensionar el grado de no linealidad que aporta la saturación de la trayectoria principal de flujo, se transforma de  $dq0$  a  $abc$  y se comparan las fases  $a$  tanto del modelo lineal como del modelo no lineal. En la figura 4.18, muestra dicha comparación, en primera instancia pareciera que ambas señales se sobreponen. Haciendo un acercamiento como se muestra en la figura 4.19, se puede apreciar que el efecto de saturación aplicado a la inductancia de magnetización es relativamente pequeño, si lo comparamos con el caso de un transformador, en el que las formas de onda se deforman de manera considerable, en este caso solamente la amplitud de la onda se reduce, pero su forma sigue siendo senoidal. Estos resultados son análogos a los presentados en [Therrien et al., 2013].

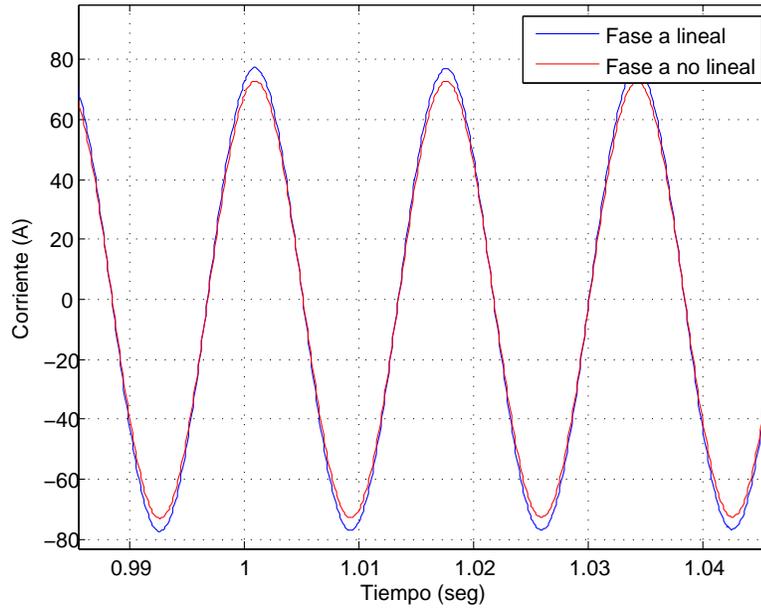


**Figura 4.17:** Curva de saturación simulada



**Figura 4.18:** Comparación fase a en el modelo lineal y no lineal

En la literatura comúnmente, en el estudio de las máquinas eléctricas giratorias, se ignora el efecto que posee la reluctancia de magnetización, en primera debido a que las



**Figura 4.19:** Acercamiento a la comparación fase a en el modelo lineal y no lineal

características magnéticas de los materiales se han mejorado al grado que no se tienen cambios bruscos en la pendiente de su curva, y por lo general las máquinas se operan en la parte lineal de la misma y en segunda, como consecuencia de la primera, siendo ésta la más importante, la reluctancia de magnetización es infinitamente pequeña en comparación con la reluctancia de entrehierro.

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajos futuros

### 5.1. Conclusiones

A lo largo del trabajo desarrollado en esta tesis, se ha tenido como tema recurrente la teoría de transformación de marcos de referencia, desde su origen, hasta las interpretaciones contemporáneas. En el recuento histórico que se hizo, se mostró la evolución que esta teoría ha tenido, con el objetivo de clarificar la razón de ser de ciertas consideraciones que se presentan en la literatura sin más trasfondo, y enmascaradas por sistema en PU sin alguna justificación evidente. También se pondera la importancia vital de la misma en el desarrollo de la teoría generalizada, para el estudio de las máquinas eléctricas rotatorias.

Haciendo uso de la teoría del álgebra lineal, se presenta de manera directa y formal la transformada ortonormal de Park, con la consigna de que ésta cumpla varios requisitos, que permiten interpretarla como una rotación propia. Sin embargo esta manera de obtener la transformada de Park, es un ejercicio netamente matemático que parte de la consideración planar de un sistema trifásico. Al ser ésta aplicada resulta natural para algunos autores relacionar esta herramienta matemática con los elementos reales que ésta representa. Ambos enfoques son completamente válidos y complementarios, por lo que en este trabajo de tesis se busca ampliar la forma en que ésta es concebida usando ambos criterios.

La teoría de marcos de referencia, es aplicable a cualquier máquina giratoria, en este trabajo de tesis solamente se aplicó a la máquina de inducción habiendo dicho esto,

se presentan los llamados modelos generalizados de la máquina de inducción en  $abc$  y  $dq0$ , con la finalidad de analizar su desempeño tanto en estado estable como en estado transitorio, así como durante contingencias de tipo simétrico y asimétrico. Se propone una forma de representar la saturación de la trayectoria principal de flujo, con los resultados obtenidos se hace la comparación con los obtenidos en el modelo lineal. El efecto de la no-linealidad no resulta ser de una proporción determinante en la respuesta del sistema, sin embargo debido a las nuevas tecnologías y al uso de fuentes conmutadas, para ciertas acciones de control es necesario considerarlo.

## 5.2. Trabajos Futuros

Algunas recomendaciones que se dan para trabajos futuros podría ser la proposición de una matriz generalizada de Park, para cualquier número de ejes, mediante la utilización de Gram-Schmidt, también se podría profundizar en el estudio de la teoría generalizada de máquinas usando la metodología de tensores propuesta por Kron, para así aplicar el método de la *diakóptica*. Así como la utilización de metodologías de modelado más avanzadas para así obtener modelos más sofisticados, que tengan la versatilidad de adecuarse a las necesidades de análisis deseadas.

# Apéndice A

## Identidades trigonométricas

### A.1. Fórmulas para el producto de senos y cosenos

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y))$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

### A.2. Fórmulas para la suma y diferencia de ángulos dobles

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x)$$

$$\operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)$$

$$\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(x)$$

$$\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(x)$$

### A.3. Fórmulas para relaciones trifásicas

$$\cos x + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\cos^2 x + \cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(y - \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(y + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\operatorname{sen}(x - y)$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(y - \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(y + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\cos(x - y)$$

$$\cos x \operatorname{sen} y + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(y - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(y + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}\operatorname{sen}(x - y)$$

$$\cos x \cos y + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(y - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(y + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\cos(x - y)$$

$$\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(y - \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(y + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\operatorname{sen}(x + y)$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(y - \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(y + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}\cos(x + y)$$

$$\cos x \operatorname{sen} y + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(y - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(y + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\operatorname{sen}(x + y)$$

$$\begin{aligned}
& \cos x \cos y + \cos \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( y - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( y + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{3}{2} \cos(x + y) \\
& \cos x \cos \left( y + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) \cos y + \cos \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( y - \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{3}{2} \cos \left( x - y - \frac{2\pi}{3} \right) \\
& \operatorname{sen} x \cos \left( y + \frac{2\pi}{3} \right) + \operatorname{sen} \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) \cos y + \operatorname{sen} \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( y - \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{3}{2} \operatorname{sen} \left( x - y - \frac{2\pi}{3} \right) \\
& \cos x \cos \left( y - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( y + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) \cos y = \frac{3}{2} \cos \left( x - y + \frac{2\pi}{3} \right) \\
& \operatorname{sen} x \cos \left( y - \frac{2\pi}{3} \right) + \operatorname{sen} \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( y + \frac{2\pi}{3} \right) + \operatorname{sen} \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) \cos y = \frac{3}{2} \operatorname{sen} \left( x - y + \frac{2\pi}{3} \right) \\
& \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \left( y + \frac{2\pi}{3} \right) + \operatorname{sen} \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) \operatorname{sen} \left( y - \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{3}{2} \cos \left( x - y - \frac{2\pi}{3} \right) \\
& \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \left( y - \frac{2\pi}{3} \right) + \operatorname{sen} \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) \operatorname{sen} \left( y + \frac{2\pi}{3} \right) + \operatorname{sen} \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \cos \left( x - y + \frac{2\pi}{3} \right)
\end{aligned}$$



# Bibliografía

- [Adkins, 1959] Adkins, B. (1959). *The general theory of electrical machines*. Chapman & Hall.
- [Adkins and Harley, 1975] Adkins, B. and Harley, R. G. (1975). *The general theory of alternating current machines: Application to practical problems*. Chapman & Hall.
- [Alexander and Sadiku, 2006] Alexander, C. K. and Sadiku, M. N. O. (2006). *Fundamentals of electric circuits*. McGraw-Hill, third edition.
- [Aliprantis, 2003] Aliprantis, D. C. (2003). *Advances in electric machine modelling and evolutionary parameter identification*. PhD thesis, Purdue University.
- [Anderson and Fouad, 2003] Anderson, P. M. and Fouad, A. A. (2003). *Power system control and stability*. John Wiley & Sons, second edition.
- [Ascher and Petzold, 1998] Ascher, U. M. and Petzold, L. R. (1998). *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*, volume 61. Siam.
- [Bergen and Vittal, 1999] Bergen, A. R. and Vittal, V. (1999). *Power systems analysis*. Prentice Hall, second edition.
- [Blondel, 1899] Blondel, A. (1899). *On the empirical theory of alternators*. L'Industrie Electrique.
- [Blondel and Mailloux, 1913] Blondel, A. and Mailloux, C. O. (1913). *Synchronous motors and converters theory and methods of calculation and testing*. McGraw Hill.

- [Cherry, 1949] Cherry, C. E. (1949). The duality between interlinked electric and magnetic circuits and the formation of transformer equivalent circuits. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, vol. 62(2):pp. 101–111.
- [Concordia, 1951] Concordia, C. (1951). *Synchronous machines, theory and performance*. John Wiley & Sons.
- [Doherty and Nickle, 1926] Doherty, R. E. and Nickle, C. A. (1926). Synchronous machines I—an extension of blondel’s two-reaction theory. *Transactions AIEE*, vol. 45:pp. 912–947.
- [Donescu et al., 1999] Donescu, V., Charette, A., Yao, Z., and Rajagopalan, V. (1999). Modelling and simulation of saturated induction motors in phase quantities. *IEEE Transactions on energy conversion*, 14(3):386–393.
- [Gibbs, 1962] Gibbs, W. J. (1962). *Electric Machine Analysis using Matrices*. Sir Isaac Pitman & Sons.
- [Gibbs, 1967] Gibbs, W. J. (1967). *Electric Machine Analysis using Tensors*. Sir Isaac Pitman & Sons.
- [Goldstein et al., 2002] Goldstein, H., Poole, C., and Safko, J. (2002). *Classical Mechanics*. Addison Wesley, third edition.
- [Grainger and Stevenson, 1994] Grainger, J. J. and Stevenson, W. D. (1994). *Power system analysis*. McGraw-hill.
- [Harris et al., 1970] Harris, M. R., Lawrenson, P. J., and Stephenson, J. M. (1970). *Per-unit systems with special reference to electrical machines IEE monograph series 4*. Cambridge at the university press.
- [Hinchey, 1979] Hinchey, F. A. (1979). *Vectores y tensores*. Limusa. Primera edición.
- [Krause and Thomas, 1965] Krause, P. and Thomas, C. (1965). Simulation of symmetrical induction machinery. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 84:pp. 1038–1053.

- [Krause et al., 2002] Krause, P. C., Wasynczuk, O., and Sudhoff, S. D. (2002). *Analysis of electric machinery and drive systems*. IEEE Press Wiley-Interscience, second edition.
- [Kron, 1938] Kron, G. (1938). *The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery Parts I-XVI Elementary Engineering Treatment*. General Electric Review.
- [Kundur et al., 1994] Kundur, P., Balu, N. J., and Lauby, M. G. (1994). *Power system stability and control*, volume 7. McGraw-hill New York.
- [Lange, 2002] Lange, S. (2002). *Introduction to linear algebra*. Undergraduate texts in mathematics. Springer, second edition.
- [Lewis, 1959] Lewis, W. A. (1959). *The principles of synchronous machines*. Edwards brothers.
- [Lipo, 1984] Lipo, T. A. (1984). A cartesian vector approach to reference frame theory of ac machines. *Department of Electrical and computer engineering, University of Wisconsin, Madison*.
- [Lipo, 2012] Lipo, T. A. (2012). *Analysis of synchronous machines*. CRC press.
- [Lipo and Consoli, 1984] Lipo, T. A. and Consoli, A. (1984). Modeling and simulation of induction motors with saturable leakage reactances. *IEEE Ind. Applicat.*, 20(1):180–189.
- [Lowenthal, 1975] Lowenthal, F. (1975). *Linear algebra with linear differential equations*. John Wiley & Sons, first edition.
- [Machowski et al., 2008] Machowski, J., Bialek, J., and Bumby, J. (2008). *Power system dynamics: stability and control*. John Wiley & Sons, second edition.
- [O’Kelly and Simmons, 1968] O’Kelly, D. and Simmons, S. (1968). *Introduction to Generalized Electrical Machine Theory*. McGraw Hill.
- [Park, 1928] Park, R. H. (1928). Definition of an ideal synchronous machine and formula for the armature flux linkages. *General electric review*, vol. 31:pp. 332–334.

- [Park, 1929] Park, R. H. (1929). Two-reaction theory of synchronous machines, generalized method of analysis-part I. *Transactions AIEE*, vol. 48:pp. 716–727.
- [Pérez, 2000] Pérez, R. C. (2000). Fitting saturation and hysteresis via arctangent functions. *IEEE Power engineering review*, 20(11):55–57.
- [Pérez, 2004] Pérez, R. C. (2004). Modelos avanzados de elementos del sistema eléctrico de potencia en coordenadas de fase para estudios de estabilidad dinámica. UANL. Tesis de doctorado.
- [Rankin, 1944] Rankin, A. W. (1944). The equations of the idealized synchronous machine. *General Electric Review*, vol. 47:pp. 31–36.
- [Rankin, 1945a] Rankin, A. W. (1945a). The direct and quadrature axis equivalent circuits of the synchronous machine. *Transactions AIEE*, vol. 64:pp. 861–868.
- [Rankin, 1945b] Rankin, A. W. (1945b). Per-unit impedances of synchronous machines. *Transactions AIEE*, vol. 64:pp. 569–573.
- [Rankin, 1945c] Rankin, A. W. (1945c). Per-unit impedances of synchronous machines -II. *Transactions AIEE*, vol. 64:pp. 839–841.
- [Say, 1948] Say, M. G. (1948). *The performance and design of alternating current machines*. Sir Isaac Pitman & Sons, second edition.
- [Seely, 1962] Seely, S. (1962). *Electromechanical energy conversion*. McGraw-Hill.
- [Shilov and Silverman, 1971] Shilov, G. E. and Silverman, R. A. (1971). *Linear Algebra. Revised English Ed. Trs. R. A. Silverman*. Prentice-Hall.
- [Shores, 2007] Shores, T. S. (2007). *Applied linear algebra and matrix analysis*. Springer, first edition.
- [Sivanagaraju and Sreenivasan, 2010] Sivanagaraju, S. and Sreenivasan, G. (2010). *Power system operation and control*. Pearson.

- [Slemon, 1953] Slemon, G. (1953). Equivalent circuits for transformers and machines including non-linear effects. *Proceedings of the IEE-Part IV: Institution Monographs*, vol. 100(5):pp. 129–143.
- [Slemon, 1990] Slemon, G. R. (1990). An equivalent circuit approach to analysis of synchronous machines with saliency and saturation. *IEEE Transactions on energy conversion*, 5(3):538–545.
- [Steinmetz, 1900] Steinmetz, C. P. (1900). *Theory and Calculation of Alternating Current Phenomena*. New York Electrical World and Engineer, third edition.
- [Strang, 1976] Strang, G. (1976). *Linear algebra and its applications*. Academic Press, second edition.
- [Strang, 2003] Strang, G. (2003). *Introduction to linear algebra*. Wellesley-Cambridge Press, third edition.
- [Taylor, 2005] Taylor, J. R. (2005). *Classical mechanics*. University science books.
- [Therrien et al., 2013] Therrien, F., Wang, L., Jatskevich, J., and Wasynczuk, O. (2013). Efficient explicit representation of ac machines flux saturation in state-variable-based transient simulation packages. *IEEE Transactions on energy conversion*, 28(2):380–392.
- [Vukosavic, 2012] Vukosavic, S. N. (2012). *Electrical machines*. Springer.
- [Waring and Crary, 1932] Waring, M. L. and Crary, S. B. (1932). The operational impedances of a synchronous machine. *General Electric Review*, vol. 35:p. 578.